

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

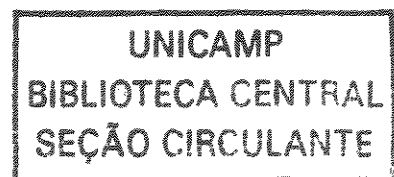
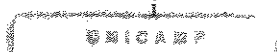
**ANÁLISE DAS DISTRIBUIÇÕES DE TENSÕES E DE
DEFORMAÇÕES EM VIGAS ANISOTRÓPICAS**

Leandro Vanalli

Campinas

2001

100201294



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE DAS DISTRIBUIÇÕES DE TENSÕES E DE
DEFORMAÇÕES EM VIGAS ANISOTRÓPICAS**

Leandro Vanalli

Orientador: Prof. Dr. Nilson Tadeu Mascia

Dissertação apresentada à Comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

Campinas, SP
2001

Atesto que esta é a versão definitiva da dissertação/tese.	
03/10/01	
Prof. Dr.	<i>Nilson Tadeu Mascia</i>
Matrícula:	21410.8

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

V263a Vanalli, Leandro
Análise das distribuições de tensões e de deformações em
vigas anisotrópicas / Leandro Vanalli. --Campinas, SP:
[s.n.], 2001.

Orientador: Nilson Tadeu Mascia.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

1. Anisotropia. 2. Deformações e tensões. 3.
Elasticidade. 4. Vigas. I. Mascia, Nilson Tadeu. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Civil. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE DAS DISTRIBUIÇÕES DE TENSÕES E DE DEFORMAÇÕES
EM VIGAS ANISOTRÓPICAS

Leandro Vanalli

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:


Prof. Dr. Nilson Tadeu Mascia

Presidente e Orientador / FEC – UNICAMP


Prof. Dr. Edgar Vladimiro Mantilla Carrasco
UFMG


Prof.ª Dr.ª Lucila Chebel Labaki
FEC – UNICAMP

Campinas, 06 de julho de 2001.

**Ao Senhor Deus Soberano,
à Simone
e aos meus pais e irmãos.**

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor Deus poderoso, que me sustenta em vida.

Ao Prof. Dr. Nilson Tadeu Mascia, pela eficiente orientação e pela confiança depositada, mas principalmente pela amizade que surgiu durante a realização desta pesquisa.

Aos amigos Rafael Alves de Souza, Eduardo César Meurer e Odair Pastor Ferreira, pelo companherismo, pela convivência agradável e pelos momentos descontraídos em nossa moradia, pois tudo isso foi muito importante durante esse trabalho.

Aos amigos da FEC: Elias, Everaldo, Jefferson, Júlio, Edvaldo, Fred, Paccola, Márcia, Sérgio, Alberto, Fernando e Renata, pela amizade e colaboração no desenvolvimento do programa de pós-graduação.

À Faculdade de Engenharia Civil, pelas facilidades na realização do trabalho.

À minha esposa Simone, pelo amor, paciência, orações e incentivo para que eu pudesse continuar nos momentos difíceis.

Aos meus pais, irmãos e familiares, que mesmo distantes, sempre me apoiaram em oração e de início financeiramente, permitindo assim que eu continuasse no programa de mestrado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo auxílio financeiro.

“Tudo quanto te vier à mão para fazer, faze-o conforme
as tuas forças, porque no além, para onde tu vais, não há obra,
nem projetos, nem conhecimento, nem sabedoria alguma.”

Eclesiastes 9:10

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xix
LISTA DE TABELAS	xxv
LISTA DE SÍMBOLOS	xxvii
RESUMO	xxxi
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Conteúdo do Trabalho	3
2 OBJETIVOS	5
3 TEORIA DA ELASTICIDADE APLICADA A UM SÓLIDO ANISOTRÓPICO	7
3.1 Introdução	7
3.2 O Estado de Tensão de um Corpo Contínuo	9
3.2.1 Equações de Equilíbrio	12
3.3 O Estado de Deformação de um Corpo Contínuo	13
3.3.1 Equações de Compatibilidade de Deslocamentos	16
3.4 Relação Tensão-Deformação (Relações Constitutivas)	17
3.4.1 Energia de Deformação	19
3.4.2 Leis Constitutivas para Materiais Elásticos Anisotrópicos	21

3.4.3 Representação Material das Leis Constitutivas	23
3.4.4 Constantes Independentes dos Tensores S_{ij} e C_{ij}	26
3.4.5 Representação das Constantes de Elasticidade	28
3.4.6 Transformação de Coordenadas para Componentes de Tensão e de Deformação	30
3.4.6.1 Matriz de Transformação de Coordenadas	31
3.4.6.2 Componentes de Tensão e de Deformação	33
3.4.7 Transformação de Coordenadas para Propriedades de Elasticidade	34
3.5 Classificação dos Materiais Segundo o Número de Planos de Simetria Elástica	37
3.5.1 Material com Simetria Elástica em um Plano	38
3.5.2 Material com Simetria Elástica em Três Planos (Material Ortótropo)	41
3.5.3 Material Transversalmente Isotrópico (Um Plano de Isotropia)	44
3.5.4 Material Isotrópico	46
3.6 Anisotropia Curvilinear	47
3.7 Sobre o Princípio de Saint-Venant	50
3.8 A Função de Tensão de Airy (ϕ)	53
 4 PROBLEMAS PLANOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE DE SÓLIDOS ANISOTRÓPICOS	 57
4.1 Estado Plano de Tensão de uma Chapa Homogênea	57
4.2 Estado Plano de Deformação num Sólido Homogêneo	60
4.3 Cálculo dos Deslocamentos de um Cilindro Anisotrópico	63

4.4 A Aplicação da Função de Tensão na Solução de Alguns Problemas Planos	67
4.4.1 Exemplos Estudados por LEKHNITSKII et al. (1968)	77
4.4.1.1 Chapa Retangular Anisotrópica	77
4.4.1.1.1 Caso 1: Tração	77
4.4.1.1.2 Caso 2: Cisalhamento	79
4.4.1.2 Flexão Pura	80
4.4.1.3 Flexão de uma Viga Engastada	81
4.4.1.4 Flexão de Vigas Anisotrópicas com Cargas Uniformemente Distribuídas	84
4.4.1.4.1 Caso 1: Viga Engastada	84
4.4.1.4.2 Caso 2: Viga Bi-Apoiada	86
4.4.1.5 Flexão de Vigas com Cargas Linearmente Distribuídas	87
4.4.1.6 Flexão de Vigas Submetidas a um Carregamento Distribuído de Forma Arbitrária	88
4.4.2 O Método Analítico de Soluções Polinomiais de HASHIN (1967)	90
4.4.2.1 Viga Engastada	96
4.4.2.2 Viga Bi-Apoiada	98
4.4.2.3 Cálculo dos Deslocamentos	100
4.5 Discussão Sobre Solução de Problemas da Elasticidade	103
5 METODOLOGIA ANALÍTICA	107

5.1 Análise dos Exemplos de LEKHNITSKII et al. (1968)	107
5.2 Análise do Método de Solução Polinomial de HASHIN (1967)	108
5.3 Determinação de Funções de Tensão	108
5.4 Estudo dos Sistemas Compósitos em Camadas	109
 6 ANÁLISE COMPARATIVA DOS EXEMPLOS DE LEKHNITSKII et al. (1968)	111
6.1 Caso 1: Viga Engastada	111
6.2 Caso 2: Viga Bi-Apoiada	123
 7 ANÁLISE COMPARATIVA DOS EXEMPLOS DE HASHIN (1967)	129
7.1 Viga Engastada Sujeita a uma Carga Concentrada	129
7.2 Viga Bi-Apoiada Sujeita a um Carregamento Distribuído	135
7.2.1 Análise Comparativa com uma Viga Isotrópica	135
7.2.2 Análise Comparativa com os Resultados de LEKHNITSKII et al. (1968)	139
 8 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE HASHIN (1967) PARA A OBTENÇÃO DE ALGUMAS FUNÇÕES DE TENSÃO	143
8.1 Viga Engastada Sujeita a um Carregamento Uniformemente Distribuído	143
8.2 Viga Engastada Sujeita a um Carregamento Distribuído de forma Triangular	150

9 ESTUDO DOS SISTEMAS COMPÓSITOS EM CAMADAS	157
9.1 Método de Análise Considerando-se a Função de Airy	158
9.2 Método de Análise de LEKHNITSKII et al. (1968)	160
9.3 Exemplo de Aplicação do Método de LEKHNITSKII et al. (1968)	166
 10 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS	 173
 ANEXOS	 177
Anexo A	179
Anexo B	187
Anexo C	201
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 205
 ABSTRACT	 211

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 3.1:	Inter-relações das variáveis na mecânica dos sólidos.	8
FIGURA 3.2:	Vetor tensão \vec{T}^n em um ponto P_0 associado a um plano n .	9
FIGURA 3.3:	O vetor tensão \vec{T}^n e os respectivos vetores \vec{T}^i nos planos coordenados	10
FIGURA 3.4:	Componentes de um vetor tensão associado ao plano normal ao eixo x_1 .	11
FIGURA 3.5:	Componentes de tensão σ_{ij} .	12
FIGURA 3.6:	Posição indeformada e deformada de um segmento.	14
FIGURA 3.7:	Elasticidade linear (a) e não – linear (b).	18
FIGURA 3.8:	Simetria elástica em 1 (um) plano.	38
FIGURA 3.9:	Rotação de 180° em torno do eixo x_3 .	39
FIGURA 3.10:	Paralelepípedo retangular possuindo 1 (um) plano de simetria elástica	41
FIGURA 3.11:	Rotação de 180° em torno do eixo x_1 .	42
FIGURA 3.12:	Eixos ortotrópicos e planos de ortotropia na madeira.	44
FIGURA 3.13:	Plano de isotropia – material transversalmente isotrópico.	45
FIGURA 3.14:	Sólido homogêneo com anisotropia curvilínea.	48
FIGURA 3.15:	Direções paralelas e equivalentes.	50
FIGURA 3.16:	Viga bi-engastada sujeita a uma carga concentrada.	52
FIGURA 3.17:	Diagrama de tensões normais na direção do eixo Z .	52

FIGURA 4.1:	Chapa submetida a um estado plano de tensão.	58
FIGURA 4.2:	Sólido anisotrópico submetido a um estado plano de deformação.	60
FIGURA 4.3:	Cilindro anisotrópico submetido a uma carga axial.	63
FIGURA 4.4:	Cilindro circular vazado submetido a uma pressão externa.	71
FIGURA 4.5:	Chapa retangular anisotrópica submetida a tração.	78
FIGURA 4.6:	Chapa retangular anisotrópica submetida a forças tangenciais.	79
FIGURA 4.7:	Viga anisotrópica submetida a um estado de flexão pura.	80
FIGURA 4.8:	Viga engastada e a distribuição de tensão σ_x em sua seção transversal.	82
FIGURA 4.9:	Viga engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.	84
FIGURA 4.10:	Viga bi-apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.	86
FIGURA 4.11:	Viga ortotrópica submetida a um carregamento linear.	87
FIGURA 4.12:	Viga possuindo somente um trecho carregado.	89
FIGURA 4.13:	Chapa genérica submetida a um estado plano de tensões.	93
FIGURA 4.14:	Viga anisotrópica sujeita a um estado plano de tensões.	91
FIGURA 4.15:	Coeficientes C_{mn} para um caso específico $M = 6$.	91
FIGURA 4.16:	Viga engastada anisotrópica sujeita a uma carga concentrada.	96
FIGURA 4.17:	Viga bi-apoiada anisotrópica sujeita a um carregamento distribuído.	99
FIGURA 4.18:	Bloco de madeira antes e depois da deformação. Análise pelo MEF.	104
FIGURA 6.1:	Viga engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.	111
FIGURA 6.2:	Deslocamentos de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie guapuruvú, e de uma viga engastada isotrópica.	114

FIGURA 6.3:	Distribuições de tensões normais de uma viga engastada anisotrópica, de madeira espécie guapuruvú, e de uma viga engastada isotrópica.	115
FIGURA 6.4:	Distribuições de tensões tangenciais de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie guapuruvú, e de uma viga engastada isotrópica.	115
FIGURA 6.5:	Deslocamentos de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie ipê, e de uma viga engastada isotrópica.	116
FIGURA 6.6:	Distribuições de tensões normais de uma viga engastada anisotrópica, de madeira espécie ipê, e de uma viga engastada isotrópica.	117
FIGURA 6.7:	Distribuições de tensões tangenciais de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie ipê, e de uma viga engastada isotrópica.	117
FIGURA 6.8:	Deslocamentos de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie ash, e de uma viga engastada isotrópica.	118
FIGURA 6.9:	Distribuições de tensões normais de uma viga engastada anisotrópica, de madeira espécie ash, e de uma viga engastada isotrópica.	119
FIGURA 6.10:	Distribuições de tensões tangenciais de uma viga engastada anisotrópica, de madeira espécie ash, e de uma viga engastada isotrópica.	119
FIGURA 6.11:	Deslocamentos de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie maple, e de uma viga engastada isotrópica.	120
FIGURA 6.12:	Distribuições de tensões normais de uma viga engastada anisotrópica, de madeira espécie maple, e de uma viga engastada isotrópica.	121
FIGURA 6.13:	Distribuições de tensões tangenciais de uma viga engastada anisotrópica, de madeira espécie maple, e de uma viga engastada isotrópica.	121
FIGURA 6.14:	Viga bi-apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.	123
FIGURA 6.15:	Distribuições de tensões normais de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie guapuruvú, e de uma isotrópica.	124

FIGURA 6.16:	Deslocamentos de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie guapuruvú, e de uma isotrópica.	124
FIGURA 6.17:	Distribuições de tensões normais de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie ipê, e de uma isotrópica.	125
FIGURA 6.18:	Deslocamentos de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie ipê, e de uma isotrópica.	125
FIGURA 6.19:	Distribuições de tensões normais de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie ash, e de uma isotrópica.	126
FIGURA 6.20:	Deslocamentos de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie ash, e de uma isotrópica.	126
FIGURA 6.21:	Distribuições de tensões normais de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie maple, e de uma isotrópica.	127
FIGURA 6.22:	Deslocamentos de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie maple, e de uma isotrópica.	127
FIGURA 7.1:	Viga engastada sujeita a uma carga concentrada	129
FIGURA 7.2:	Distribuições de tensões normais de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira, espécies guapuruvú e ipê, e de uma isotrópica.	131
FIGURA 7.3:	Distribuições de tensões normais de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies guapuruvú e ipê, e de uma isotrópica.	132
FIGURA 7.4:	Distribuições de tensões normais, na seção $x = 1\text{m}$, de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies guapuruvú e ipê, e de uma isotrópica.	133
FIGURA 7.5:	Distribuições de tensões normais, na extremidade livre $x = 2\text{m}$, de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies guapuruvú e ipê, e de uma isotrópica.	134
FIGURA 7.6:	Viga bi-apoiada sujeita a um carregamento distribuído.	136
FIGURA 7.7:	Distribuições de tensões normais, na seção $x = 0$, de duas vigas bi-apoiadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies guapuruvú e ipê, e de uma isotrópica.	137

FIGURA 7.8:	Distribuições de tensões normais, na seção $x = 0.75\text{m}$, de duas vigas bi-apoiadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies guapuruvú e ipê, e de uma isotrópica.	137
FIGURA 7.9:	Distribuições de tensões de cisalhamento, na seção $x = 1.5\text{m}$, de duas vigas bi-apoiadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies guapuruvú e ipê, e de uma isotrópica.	138
FIGURA 7.10:	Distribuições de tensões de cisalhamento, na seção $x = 0.75\text{m}$, de duas vigas bi-apoiadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies guapuruvú e ipê, e de uma isotrópica.	138
FIGURA 7.11:	Gráfico comparativo das distribuições de tensões normais, na seção $x = 0$, obtidas por LEKHNITSKII et al.(1968) e por HASHIN (1967) para uma viga bi-apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.	140
FIGURA 7.12:	Gráfico comparativo das distribuições de tensões normais, na seção $x = 0.75\text{m}$, obtidas por LEKHNITSKII et al.(1968) e por HASHIN (1967) para uma viga bi-apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.	140
FIGURA 8.1:	Viga engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.	143
FIGURA 8.2:	Distribuições de tensões normais, na seção $x = 0$, de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira, espécie ipê, e de uma isotrópica.	147
FIGURA 8.3:	Distribuições de tensões de cisalhamento, na seção $x = 0$, de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira, espécie ipê, e de uma isotrópica.	148
FIGURA 8.4:	Distribuições de tensões normais, na seção $x = 0$, de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira, espécie guapuruvú, e de uma isotrópica.	148
FIGURA 8.5:	Distribuições de tensões de cisalhamento, na seção $x = 0$, de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira, espécie guapuruvú, e de uma isotrópica.	149
FIGURA 8.6:	Viga engastada sujeita a um carregamento triangular distribuído.	150
FIGURA 8.7:	Distribuições de tensões normais, na seção $x = 0$, de duas vigas engastadas, uma anisotrópica e outra isotrópica.	154

FIGURA 8.8:	Distribuições de tensões de cisalhamento, na seção $x = 0$, de duas vigas engastadas, uma anisotrópica e outra isotrópica.	154
FIGURA 8.9:	Distribuições de tensões normais, na seção $x = 1.50\text{m}$, de duas vigas engastadas, uma anisotrópica e outra isotrópica.	155
FIGURA 8.10:	Distribuições de tensões de cisalhamento, na seção $x = 1.50\text{m}$, de duas vigas engastadas, uma anisotrópica e outra isotrópica.	155
FIGURA 9.1:	Formas de reorganização da madeira e seus derivados.	158
FIGURA 9.2:	Viga laminada engastada, composta de um número arbitrário de camadas.	160
FIGURA 9.3:	Viga laminada composta de duas camadas sujeita a uma carga concentrada.	164
FIGURA 9.4:	Distribuições de tensões normais e tangenciais numa viga laminada.	165
FIGURA 9.5:	Viga engastada composta de três camadas.	166
FIGURA 9.6:	Distribuições de tensões normais numa viga laminada composta de três camadas.	168
FIGURA 9.7:	Distribuições de tensões de cisalhamento numa viga laminada composta de três camadas.	169
FIGURA 9.8:	Distribuições de tensões de cisalhamento numa viga laminada composta de três camadas.	170
FIGURA 9.9:	Distribuições de tensões de cisalhamento numa viga laminada composta de três camadas.	171

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 :	Regras de transformação entre ij (ou kl) e α (ou β).	25
TABELA 3.2 :	Coeficientes de Influência Mútua de 2ª Espécie.	30
TABELA 3.3 :	Coeficientes de Influência Mútua de 1ª Espécie.	30
TABELA 3.4 :	Cossenos diretores.	33
TABELA 3.5 :	Cossenos diretores.	34
TABELA 3.6 :	Coeficientes q_{ij} .	36
TABELA 4.1 :	Valores de k para algumas espécies de madeira.	70
TABELA 7.1 :	Valores para as constantes elásticas das madeiras guapuruvú e ipê.	136
TABELA 9.1 :	Valores para o módulo de elasticidade (E_x).	166

LISTA DE SÍMBOLOS

A	: área da seção transversal.
C_{ijkl}, C_{ij}	: tensor constitutivo (de constantes de elasticidade).
S_{ijkl}, S_{ij}	: tensor constitutivo (compliância).
E_i	: módulo de elasticidade longitudinal.
G_{ij}	: módulo de elasticidade transversal.
ν_{ij}	: coeficiente de Poisson.
$\mu_{ij,k}$: coeficiente de Chentsov.
$\eta_{ij,k}$: coeficiente de influência mútua de 1 ^a . espécie.
$\eta_{i,jk}$: coeficiente de influência mútua de 2 ^a . espécie.
η	: ordenada do eixo de flexão.
κ, ϖ	: constantes.
C_0, c	: constantes.
e_j	: base ortogonal.
n	: vetor unitário.
v	: vetor.
u_0, v_0, ϖ	: deslocamento de corpo rígido.
x_i	: sistemas de coordenadas.

u_i	: deslocamento.
F_{ij}	: função resposta.
F_i	: força de massa.
F_n	: força resultante.
T_i	: força de superfície.
T^n	: vetor tensão.
σ_n	: tensão normal.
σ_{ij}	: tensor das tensões, tensão.
τ_{ij}	: tensão tangencial.
ϕ	: função de tensão de Airy.
ψ	: função de tensão arbitrária, função auxiliar de Airy.
χ	: função de tensão arbitrária.
ε_{ii}	: tensor de deformações, deformação.
γ_{ij}	: componentes de deformação.
$p(\varphi), (\theta)$: distribuição de pressão.
θ, φ	: ângulo arbitrário.
β_{ij}	: coeficiente reduzido de deformação.
q_{ij}	: coeficientes de transformação de coordenadas.
l_{ij}	: cossenos diretores, matriz de transformação.
δ^n_i	: vetor deslocamento relativo.
δ_{ij}	: delta de Kronecher.
U_0	: energia de deformação.

ξ, η, ζ	: coordenadas curvilíneas.
α_{ij}	: coeficientes elásticos lineares.
α_i	: retração.
I	: momento de inércia da seção transversal.
L	: longitudinal.
R	: radial.
T	: tangencial.

RESUMO

VANALLI, Leandro. Análise das Distribuições de Tensões e de Deformações em Vigas Anisotrópicas. 2001. 121f. Dissertação (mestrado em engenharia civil) - Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Este trabalho apresenta uma análise sobre as distribuições de tensões e de deformações em sólidos anisotrópicos no âmbito da Teoria da Elasticidade. Neste contexto, para se estudar o comportamento mecânico, baseando-se no entendimento das tensões, deformações e deslocamentos, de vigas anisotrópicas, foram analisadas funções de tensão, consoantes com aquelas desenvolvidas por LEKHNITSKII et al. (1968) e HASHIN (1967). Comparações de resultados com estruturas de material isotrópico também foram alvo de investigação. Por fim, um estudo sobre vigas com seções constituídas de camadas foi realizado. Os resultados obtidos fornecem informações que contribuem para a aplicação dos materiais anisotrópicos em estruturas da construção civil.

Palavras-chave: Anisotropia; Funções de tensão; Elasticidade.

1 INTRODUÇÃO

Comumente, ao se depararem com as estruturas que os cercam, sejam elas de concreto, madeira ou outro material qualquer, os engenheiros são levados a tentar compreender a forma como a estrutura cumpre o papel para o qual foi projetada.

Ao serem solicitadas, ocorrem nessas estruturas alguns efeitos que, na maioria das vezes, são imperceptíveis visualmente. Esses efeitos são as deformações e os deslocamentos, que juntamente com as tensões, formam o objeto de estudo da mecânica das estruturas.

Dependendo dos materiais que compõem uma estrutura, pode-se ter diversas variantes numa análise estrutural, como por exemplo, homogeneidade das características físicas do material e simetria de suas propriedades elásticas. Surgem assim, os modelos e as teorias criadas para o entendimento do comportamento das estruturas, tanto a nível macroscópico como microscópico.

Na teoria da elasticidade, tem-se buscado no decorrer dos anos, através de estudos teóricos ou empíricos, a idealização de modelos que possam interpretar o comportamento elástico dos sólidos anisotrópicos. Em geral, um modelo anisotrópico estabelece que não há simetria no material e que existem diferenças em suas propriedades elásticas. Quanto aos sólidos isotrópicos, ao se estudar suas propriedades de elasticidade, observa-se que elas são invariantes para quaisquer direções estabelecidas a partir de um determinado ponto.

Nos sólidos anisotrópicos, quando estes são submetidos a situações de carregamento, surgem deformações outras das apresentadas pelos sólidos considerados isotrópicos. Essas deformações, associadas a certas constantes de elasticidade, chamadas de coeficientes de influência mútua, quantificam a influência de tensões normais em deformações tangenciais e de tensões tangenciais em deformações normais. Nesses sólidos, a relação entre tensões e deformações, é representada pelo tensor constitutivo do material, C_{ijkl} , formado por 81 componentes, onde estão presentes todas as constantes de elasticidade que caracterizam o comportamento intrínseco do material, em quaisquer pontos do sólido.

Buscando-se uma contribuição para os estudos sobre anisotropia, são analisadas, neste trabalho, as distribuições de tensões e de deformações em alguns elementos estruturais, como por exemplo, chapas e vigas anisotrópicas.¹ Para tanto, procurando-se determinar as funções de tensão, que fornecem as soluções das equações diferenciais que modelam alguns problemas de elasticidade, são aplicadas as equações de equilíbrio, as relações deformação-deslocamento e as equações constitutivas, considerando-se sempre o estado plano de tensões e de deformações. Determinada a função de tensão, é possível se obter as tensões em todos os pontos do sólido, e a partir daí, através das equações constitutivas, as deformações.

Na formulação de alguns problemas, a utilização dos conceitos de conservação de energia e de simetria elástica dos tensores de tensão e de deformação, bem como do princípio de Saint-Venant, auxiliou na obtenção das equações constitutivas dos sólidos anisotrópicos, e diminuíram as dificuldades analíticas presentes no desenvolvimento do trabalho.

¹ Na verdade, não é uma viga em especial e sim um material que pode ser anisotrópico. Visando-se uma simplificação de nomenclatura, uma viga formada por um material anisotrópico é chamada de anisotrópica. Porém, deve-se lembrar que a anisotropia não está ligada à peça, ou a algo intrínseco a fenomenologia de barras, quando é característica local de um material, esteja em vigas, chapas, sólidos ou fluidos.

1.1 Conteúdo do Trabalho

Os objetivos do trabalho são descritos no **capítulo 2**. No **capítulo 3**, os conceitos sobre Elasticidade, sobre tensões, deformações e outros são apresentados, pois se mostram necessários ao desenvolvimento do trabalho.

No **capítulo 4** é apresentada uma fundamentação teórica sobre problemas planos da teoria da Elasticidade envolvendo sólidos anisotrópicos, abordando-se a formulação dos problemas nos estados planos de tensão e de deformação. Uma revisão bibliográfica a respeito da aplicação das funções de tensão na solução de problemas planos é realizada, dando-se ênfase a utilização da função de tensão de Airy, na solução de vigas anisotrópicas, por LEKHNITSKII et al. (1968) e por HASHIN (1967).

A metodologia analítica empregada na análise dos sólidos anisotrópicos estudados no trabalho é apresentada no **capítulo 5**. No **capítulo 6**, as soluções determinadas por LEKHNITSKII et al. (1968) para vigas anisotrópicas são analisadas e comparadas com as soluções para vigas isotrópicas.

No **capítulo 7**, as soluções obtidas por HASHIN (1967), bem como seu método de solução, são estudados. No **capítulo 8**, o mesmo método de análise de vigas anisotrópicas de HASHIN (1967) é utilizado para se obter as tensões em duas vigas anisotrópicas engastadas, uma sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, e a outra, sujeita a um carregamento triangular. Comparações com os resultados de LEKHNITSKII et al. (1968) e com soluções para vigas isotrópicas são realizadas nos dois capítulos.

No **capítulo 9**, a aplicação da função de tensão de Airy na solução dos sistemas compostos em camadas, especialmente madeira laminada, é abordada. No **capítulo 10**, as conclusões do trabalho são apresentadas.

2 OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivos apresentar uma investigação teórica sobre elasticidade anisotrópica, bem como, estudar distribuições de tensões e de deformações em sólidos anisotrópicos.

Para tanto, é dada ênfase à aplicação, e determinação, de funções de tensão na solução de problemas planos envolvendo sólidos anisotrópicos, procurando-se, também, evidenciar as diferenças existentes entre o comportamento elástico destes sólidos e dos sólidos que possuem outro tipo de simetria elástica, como por exemplo, os isotrópicos.

É intuito, também, deste trabalho, apresentar um estudo sobre os sistemas compostos em camadas, particularmente sobre vigas de madeira laminada, analisando-se as distribuições de tensões nesses sistemas quando eles são submetidos à flexão.

3 TEORIA DA ELASTICIDADE APLICADA A UM SÓLIDO ANISOTRÓPICO

Neste capítulo apresenta-se a fundamentação teórica necessária ao desenvolvimento do trabalho. Alguns conceitos importantes como, por exemplo, os conceitos sobre elasticidade, tensões, deformações e de simetria elástica, são abordados visando-se sua aplicação na análise de sólidos anisotrópicos.

3.1 Introdução

A solução de um problema na mecânica dos sólidos, de acordo com DESAI & SIRIWARDANE (1984), baseia-se em princípios fundamentais os quais governam a mecânica clássica, ou seja, conservação de massa, conservação de momento, conservação de energia e nas leis de irreversibilidade termodinâmica.

Estes princípios são, em geral, válidos para todos os materiais, independente de sua constituição interna. No entanto, a resposta de um sistema ou de um meio contínuo, sujeitos a uma ação externa, não pode ser determinada de forma única com a aplicação de equações derivadas dos princípios citados anteriormente. Para tanto, são necessárias considerações adicionais, baseadas na natureza intrínseca dos materiais. Essas equações que modelam o

comportamento, ou a resposta elástica dos materiais, são denominadas de leis ou equações constitutivas.

Segundo CHEN & SALEEB (1982), as diferentes características mecânicas dos vários materiais são relatadas pelas leis constitutivas do material. Essas leis fornecem as relações entre as tensões e as deformações em qualquer ponto no sólido. Elas podem ser simples ou extremamente complexas, dependendo do material do sólido e das condições a que ele está submetido.

Uma vez que a lei constitutiva do material é estabelecida, a formulação geral para a solução de um problema na mecânica dos sólidos é completa. O inter-relacionamento das variáveis encontradas na formulação geral é mostrado na Figura 3.1, onde F_i e T_i são respectivamente, forças de volume e de superfície; u_i são os deslocamentos; σ_{ij} são as tensões e ϵ_{ij} as deformações.

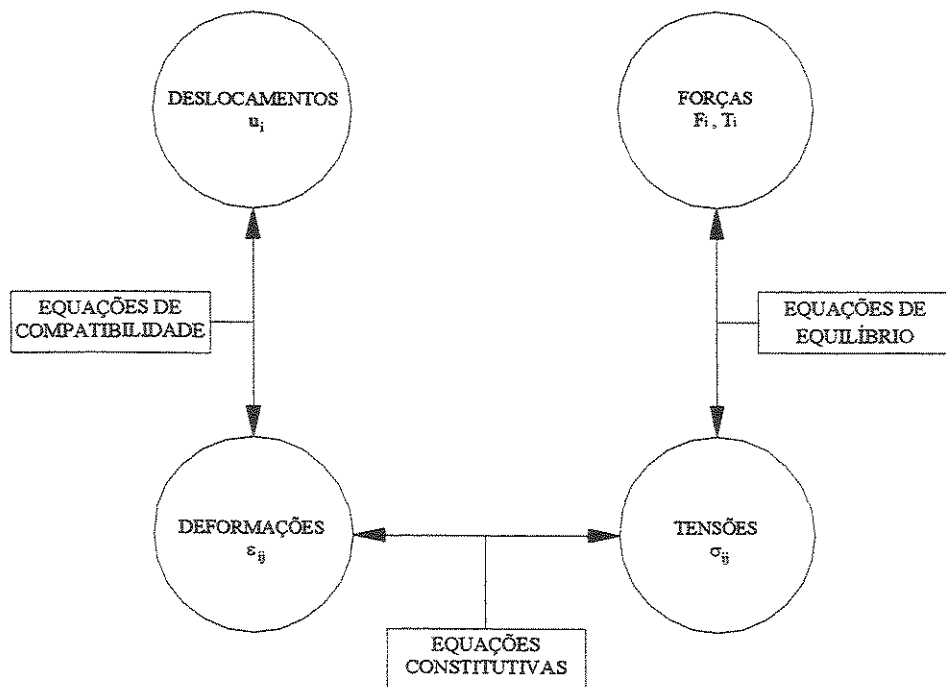


FIGURA 3.1: Inter-relações das variáveis na mecânica dos sólidos.

Fonte: CHEN & SALEEB (1982).

A seguir é analisado cada um dos integrantes da Figura 3.1, com vistas a se obter um entendimento cabal da formulação dos problemas na mecânica dos sólidos.

3.2 O Estado de Tensão de um Corpo Contínuo

Considerando-se um ponto P_0 , um vetor unitário n , normal a uma área ΔA , neste ponto, e uma força resultante F_n , pode-se escrever o vetor tensão associado ao ponto P_0 com o plano normal a n através da seguinte expressão:

$$\overset{n}{T} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{F_n}{\Delta A} \quad (3.1)$$

cujos elementos são mostrados na Figura 3.2:

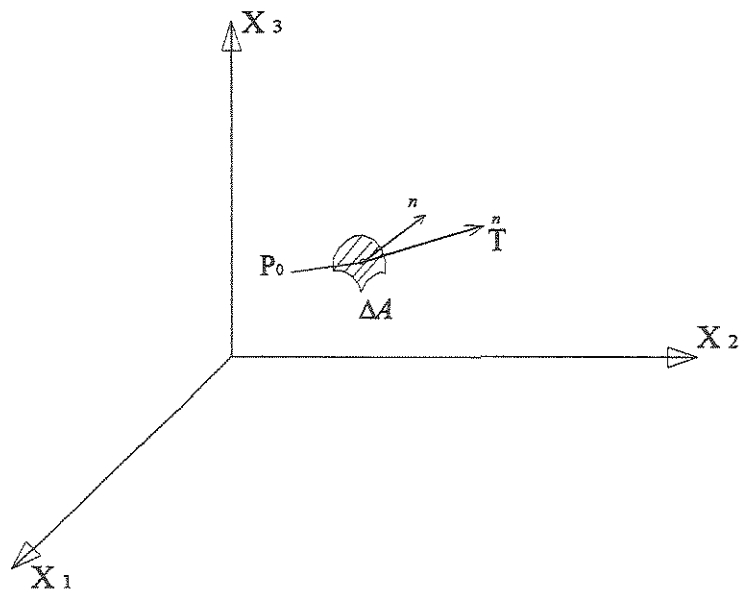


FIGURA 3.2: Vetor tensão $\overset{n}{T}$ em um ponto P_0 associado a um plano n .

Fonte: CHEN & SALEEB (1982).

Com a utilização de apenas 3 (três) vetores $\vec{T}^n \left(\vec{T}^1, \vec{T}^2, \vec{T}^3 \right)$, sobre três planos mutuamente perpendiculares, caracteriza-se o estado de tensão em um ponto.

Para a comprovação desta condição, CHEN & SALEEB (1982) por exemplo, utilizam a Figura 3.3, onde os vetores $\vec{T}^1, \vec{T}^2, \vec{T}^3$ e \vec{T}^n atuam nas faces OBC, OAC, OAB, ABC, respectivamente, de um elemento OABC.

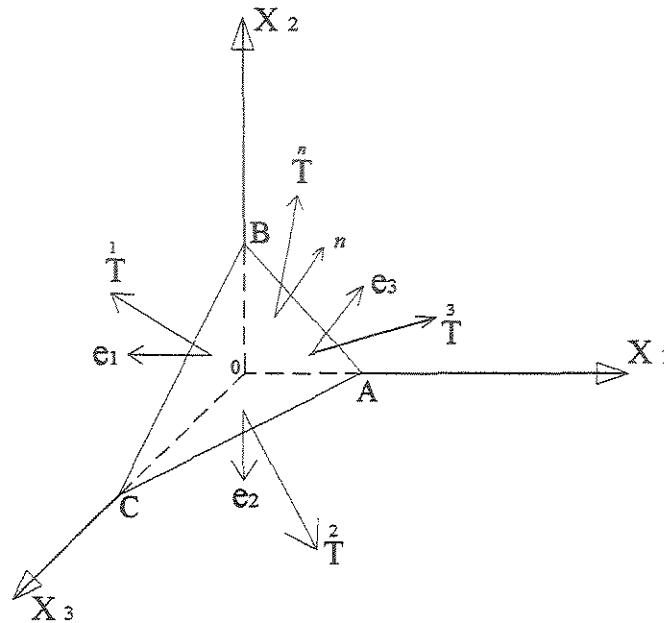


FIGURA 3.3: O vetor tensão \vec{T}^n e os respectivos vetores \vec{T}^i nos planos coordenados.

Fonte: CHEN & SALEEB (1982).

Do equilíbrio do elemento OABC:

$$\vec{T}^n = \vec{T}^1 n_1 + \vec{T}^2 n_2 + \vec{T}^3 n_3 \quad (3.2)$$

O vetor \vec{T}^n não necessita ser perpendicular ao plano n , ele pode ser decomposto em 2 (duas) componentes, uma normal ao plano n , chamada tensão normal, e outra paralela ao plano n , chamada tensão tangencial ou de cisalhamento.

Os vetores tensão associados com cada um dos três planos coordenados x_1, x_2, x_3 são decompostos nos 3 (três) eixos coordenados. Por exemplo, o vetor tensão $\overset{1}{T}$ associado ao plano perpendicular ao eixo x_1 tem 3 (três) componentes de tensão: normal σ_{11} e tangenciais σ_{12} e σ_{13} , na direção dos eixos coordenados x_1, x_2 e x_3 , respectivamente (Figura 3.4).

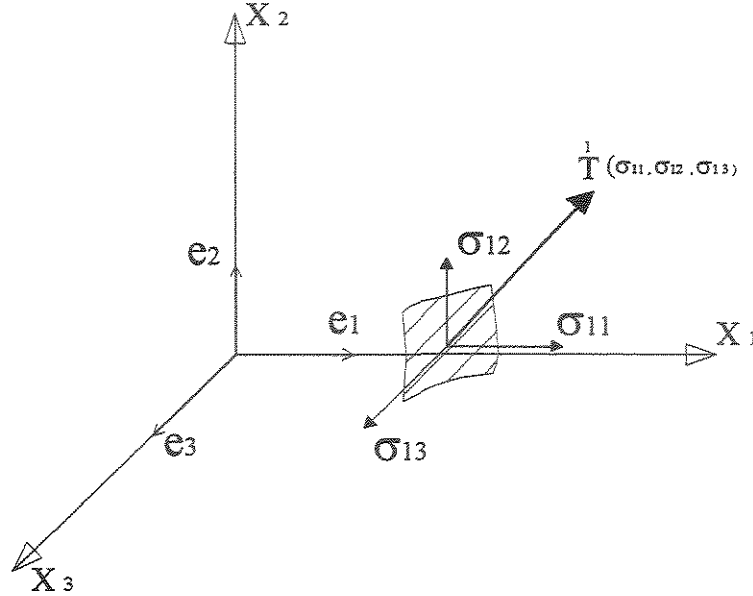


FIGURA 3.4: Componentes de um vetor tensão associado ao plano normal ao eixo x_1 .

Fonte: CHEN & SALEEB (1982).

Deste modo, conforme a Figura 3.4, pode-se escrever que:

$$\overset{1}{T} = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \mathbf{e}_3 \quad (3.3)$$

ou, em notação indicial, considerando-se as demais componentes do vetor tensão, tem-se de uma forma geral:

$$\overset{i}{T} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (3.4)$$

onde σ_{ij} representa a j -ésima componente do vetor $\overset{i}{T}$ atuando em um elemento de área cuja normal está na direção positiva do eixo x_i e \mathbf{e}_j são os vetores unitários que formam a base do sistema de coordenadas. O conjunto das 9 (nove) componentes σ_{ij} que definem $\overset{1}{T}, \overset{2}{T}$ e $\overset{3}{T}$ é chamado de tensor de tensões e é dado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{T} \\ 2 \\ \mathbf{T} \\ 3 \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

onde σ_{ij} com $i = j$: tensão normal e
 σ_{ij} com $i \neq j$: tensão tangencial

As componentes do tensor de tensões estão mostradas nas direções positivas referidas ao sistema de eixos coordenados, na Figura 3.5.

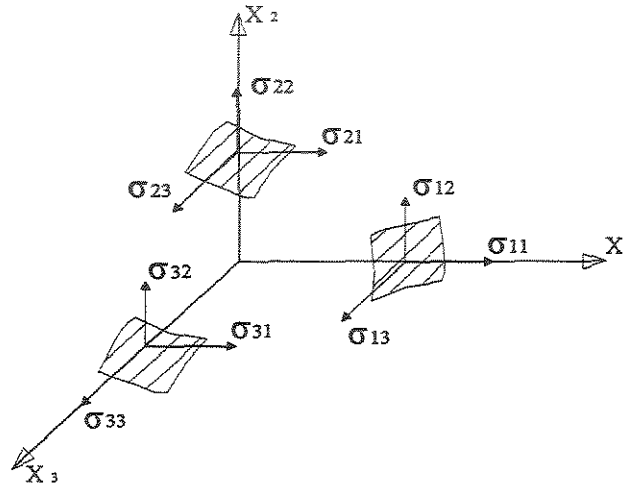


FIGURA 3.5: Componentes de tensão σ_{ij} .

Fonte: CHEN & SALEEB (1982).

3.2.1 Equações de Equilíbrio

Das considerações de equilíbrio da estática, pode-se relatar as tensões no corpo devido à ação das forças externas T_i e das forças de volume F_i . Existem seis componentes do tensor de tensões para um elemento infinitesimal do corpo. Diz-se que o campo de tensões que satisfaz essas condições estáticas é estaticamente admissível.

Assim, CHEN & SALEEB (1982) apresentam as equações de equilíbrio, em notação indicial¹:

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0 \quad (3.6)$$

e as forças externas de superfície, que são as condições de contorno:

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \quad (3.7)$$

Qualquer conjunto de tensões σ_{ij} , forças de volume F_i , e forças externas de superfície T_i que satisfazem as equações anteriores, é um conjunto estaticamente admissível ou simplesmente um conjunto em equilíbrio. Como pode ser visto, somente três equações de equilíbrio são obtidas em qualquer ponto no sólido para forças F_i prescritas. Deste modo, têm-se três equações de equilíbrio com seis incógnitas, nominalmente, as componentes de tensão σ_{ij} em um dado ponto do sólido.

3.3 O Estado de Deformação de um Corpo Contínuo

As ações aplicadas num sólido causam deformações e deslocamentos. Quando a posição relativa de dois pontos quaisquer num sólido é alterada este sólido é considerado deformado.

Segundo CHEN & SALEEB (1982), o estado de deformação de um ponto é definido como a totalidade das mudanças nos comprimentos das linhas (fibras) do material que interceptam o ponto em questão e, também, a totalidade das mudanças no ângulo entre qualquer par de linhas irradiadas neste ponto.

¹ Na notação indicial, a vírgula representa diferenciação em relação a variável que vem logo a seguir.

A Figura 3.6 apresenta um segmento infinitesimal OP de um ponto O num sólido, em sua configuração inicial, indeformado, com comprimento igual a unidade. Depois da deformação, o elemento é deslocado para a posição $O'P'$. A posição $O'P''$ representa o deslocamento de corpo rígido do segmento. O vetor deslocamento relativo do ponto P com respeito ao ponto O é denominado por $\delta^{n'}$. O índice subscrito n indica a relação com o vetor n .

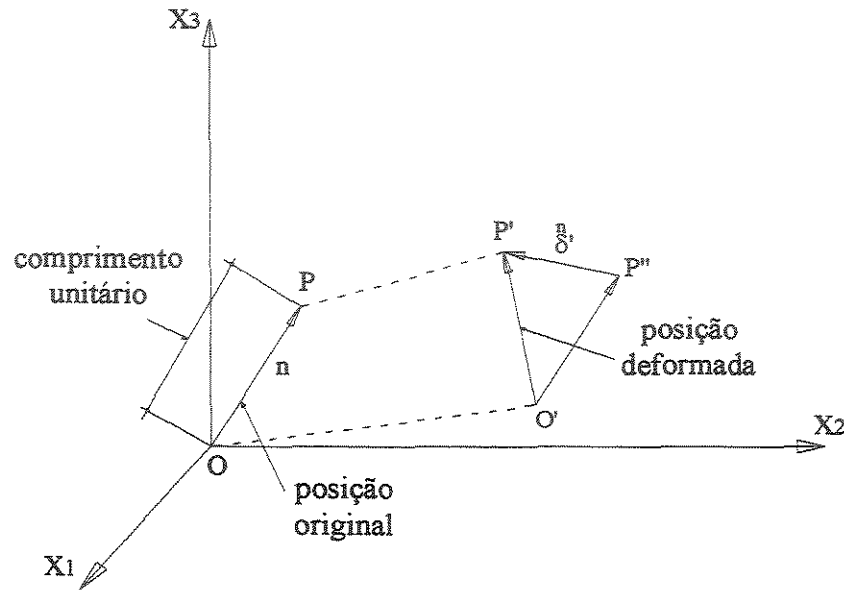


FIGURA 3.6: Posição indeformada e deformada de um segmento.

Fonte: CHEN & SALEEB (1982).

Se for adotado um sistema de eixos coordenados x_1 , x_2 e x_3 , as componentes de deslocamento podem ser decompostas nestes 3 (três) eixos e associadas a um deslocamento relativo δ' . Assim, pode-se escrever que o deslocamento relativo será:

$$\delta_i^{n'} = \varepsilon'_{ji} n_j \quad (3.8)$$

onde ε'_{ji} são componentes do vetor deslocamento relativo nas direções dos 3 (três) eixos coordenados e n_j são os cossenos diretores.

Deste modo, com 9 (nove) elementos de ε'_{ji} , definem-se os 3 (três) deslocamentos relativos $\delta^{1'}$, $\delta^{2'}$ e $\delta^{3'}$ que constituem o tensor dos deslocamentos relativos.

Usando-se notação matricial, este tensor pode ser escrito como:

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Em geral o tensor ε'_{ij} é não simétrico. Por outro lado, todo tensor de 2ª ordem pode ser decomposto na soma de uma parte simétrica e de uma anti-simétrica. Assim, a parte simétrica representará a deformação pura enquanto a parte anti-simétrica representa a rotação de corpo rígido do sólido. Assim:

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon'_{ij} + \varepsilon'_{ji}) + \frac{1}{2}(\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'_{ji}) \quad (3.10)$$

ou

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (3.11)$$

onde ε_{ij} é o tensor de deformações e ω_{ij} é o tensor das rotações.

O tensor ε_{ij} , que é o de interesse na análise de deformações, pode ser escrito em uma forma matricial como segue:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde ε_{ij} , com $i = j$, são deformações normais e ε_{ij} , com $i \neq j$, são deformações tangenciais.

Em certos casos é conveniente utilizar as deformações tangenciais, denotadas por γ_{ij} , indicando-se a variação total dos ângulos entre duas fibras, as quais estavam dispostas perpendicularmente antes da deformação. Assim:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Observa-se que este tipo de notação é usual em engenharia.

3.3.1 Equações de Compatibilidade de Deslocamentos

Segundo CHEN & SALEEB (1982), as condições de compatibilidade ou de geometria advém das considerações da cinemática que relacionam as componentes de um campo de deformação, ε_{ij} , com as componentes de um campo de deslocamento u_i . Existem seis equações da cinemática expressando as seis componentes do tensor deformação em termos das três componentes de deslocamentos.

É necessário impor condições de compatibilidade de deformação e de deslocamento no sentido de se assegurar que essas relações deformações-deslocamentos são integradas para um determinado campo de deformação. Para pequenas deformações, CHEN & SALEEB (1982) fornecem as relações deformação-deslocamentos e as condições de compatibilidade:

- Relações deformação-deslocamento:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.14)$$

- Condições de compatibilidade:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (3.15)$$

Um conjunto de deslocamentos u_i e de deformações ε_{ij} que satisfaz as relações citadas e as condições de contorno de deslocamentos é denominada série compatível ou série de compatibilidade. De modo análogo à série de equilíbrio, uma série compatível é uma das muitas possíveis que se enquadram nas relações (3.15).

Na solução de problemas na elasticidade clássica, além da função de tensão, deve-se também impor as condições de compatibilidade de deslocamentos, pois os deslocamentos u_i não são incógnitas discretizadas na formulação dos problemas.

Entretanto, em outros métodos, como por exemplo no Método dos Elementos Finitos, os deslocamentos são tomados como incógnitas do problema, e no lugar das equações de compatibilidade, as relações deformações - deslocamentos são empregadas para se determinar as deformações a partir dos deslocamentos.

Neste caso, existem nove incógnitas independentes, isto é, seis componentes de tensão σ_{ij} e três componentes de deslocamentos u_i . Posto que se possua três equações de equilíbrio, há necessidade de serem adicionadas outras seis relações para se integrar a formulação do problema. Estas outras relações advêm das leis constitutivas dos materiais.

3.4 Relação Tensão-Deformação (Relações Constitutivas)

As equações de equilíbrio e as de compatibilidade são insuficientes para a solução de problemas da mecânica dos sólidos. É necessário também indicar relações adicionais entre as componentes de tensão e de deformação. Para este propósito, é necessário usar um modelo que represente as propriedades elásticas do corpo (LEKHNITSKII et al., 1968).

De acordo com LEKHNITSKII (1981), considerando-se somente pequenas deformações, o corpo elástico é tomado como um corpo contínuo obedecendo a lei de Hooke generalizada, ou

seja, um corpo no qual as componentes de deformação são funções lineares das componentes de tensão. Uma vez cessada a ação geradora de tensões e de deformações, um sólido elástico retorna a sua configuração inicial sem guardar deformações residuais. A esta propriedade dá-se o nome de elasticidade. Um sólido elástico pode ter comportamento linear ou não-linear, como é indicado na Figura 3.7:

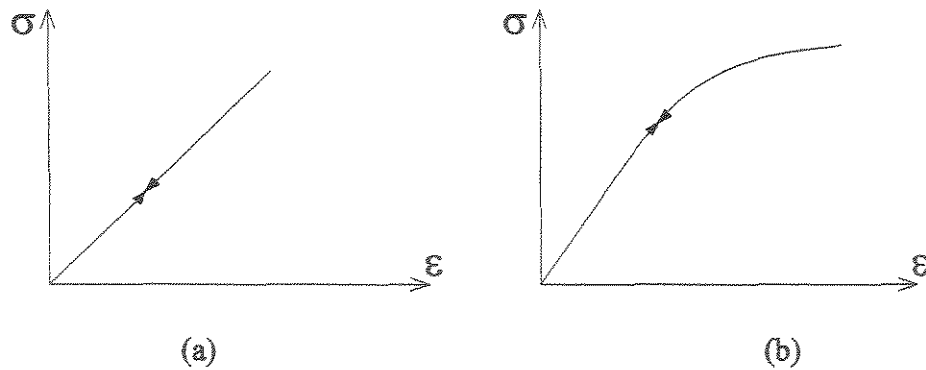


FIGURA 3.7: Elasticidade linear (a) e não – linear (b).

Fonte: DESAI & SIRIWARDANE (1984).

Para estes sólidos, o estado de tensões depende, somente, do estado presente de deformações, ou seja, existe reversibilidade entre tensões e deformações. Matematicamente define-se:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\epsilon_{kl}) \quad (3.16)$$

onde F_{ij} é uma função resposta do material.

As relações tensão-deformação ou modelos constitutivos descritos pelas equações (3.16) estão baseados em hipóteses que não dependem do fator tempo e somente sólidos sob condições adiabáticas e isotérmicas são considerados (LOVE, 1944).

3.4.1 Energia de Deformação

As leis e equações que regem os problemas de engenharia estão relacionadas com a energia armazenada num sólido. Assim, um sólido elástico é capaz de acumular a energia desenvolvida pelos agentes externos, ou seja, o trabalho externo como energia potencial, a qual é admitida função exclusiva das deformações existentes no sólido. Essa energia potencial é denominada energia de deformação.

Segundo DESAI & SIRIWARDANE (1984), se nenhuma energia é dissipada durante o processo de deformação, as leis ou modelos derivados desta suposição são chamados de modelos elásticos de Green e o material que constitui o sólido, de material hiperelástico. Dessa maneira, um material hiperelástico é aquele que possui uma energia de deformação U_0 .

Considere-se, agora, uma série de compatibilidade virtual obtida quando o sólido experimenta um deslocamento infinitesimal virtual δu_i na sua configuração de equilíbrio. Sejam $\delta \varepsilon_{ij}$ as deformações compatíveis, com as condições geométricas sendo satisfeitas em $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})$. O princípio dos trabalhos virtuais inter-relaciona uma série de equilíbrio F_i , T_i , σ_{ij} com uma série de compatibilidade virtual δu_i , $\delta \varepsilon_{ij}$ através da equação:

$$\int_A T_i \delta u_i dA + \int_V F_i \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (3.17)$$

A parcela à esquerda da equação representa a variação do trabalho externo δW e a parcela à direita representa a variação da energia de deformação δU . Assim:

$$\int_V \delta U dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (3.18)$$

mas,

$$\delta U = \int_V \delta U_0 dV \quad (3.19)$$

portanto:

$$\delta U_0 = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (3.20)$$

Desde que U_0 é função somente de componentes relativas às deformações ε_{ij} , tem-se:

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} \quad (3.21)$$

Dessa forma obtém-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.22)$$

Essa relação é chamada de lei constitutiva hiperelástica ou de Green.

3.4.2 Leis Constitutivas para Materiais Elásticos Anisotrópicos

Utilizando-se das propriedades da energia de deformação, pode-se estabelecer, segundo CHEN & SALEEB (1982), formulações das leis constitutivas para diversas classes de materiais elásticos. Seja, então, a função energia de deformação, caracterizada pela seguinte série polinomial:

$$U_0 = C_0 \delta_{ij} + \kappa_{ij} \varepsilon_{ij} + \varpi_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (3.23)$$

onde: C_0 , κ_{ij} , ϖ_{ijkl} são constantes.

Baseando-se nos conceitos de energia de deformação, onde a energia de deformação tem um valor estacionário em relação ao tensor das deformações, é possível arbitrar para essa constante C_0 um valor igual a zero. Aplicando-se a expressão $\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}$, com U_0 de acordo com a equação (3.23) obtém-se:

$$\sigma_{ij} = \kappa_{ij} + (\varpi_{ijkl} + \varpi_{klij}) \varepsilon_{kl} \quad (3.24)$$

Para o caso relativo ao “estado natural” no qual as tensões e as deformações estão vinculadas a todo o sólido e, também, estão atuando simultaneamente no sólido, consegue-se escrever que:

$$(\sigma_{ij})_0 = \left(\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0 = 0 \quad (3.25)$$

onde a notação entre parênteses com índice 0, aponta para um estado natural com tensões e deformações nulas. Assim, κ_{ij} vale zero. Denominando-se $(\varpi_{ijkl} + \varpi_{klij})$ de C_{ijkl} , pode-se escrever que:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.26)$$

O tensor C_{ijkl} é chamado de tensor de constantes de elasticidade.

Pode-se exprimir a lei constitutiva $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ em uma forma tensorial alternativa, admitindo-se naturalmente que $|C_{ijkl}| \neq 0$, por intermédio de:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.27)$$

onde: S_{ijkl} é denominado tensor de compliância.²

Do ponto de vista formal, os tensores C_{ijkl} e S_{ijkl} são constituídos de 81 (oitenta e um) elementos, haja vista que os índices i, j, k, l variam de 1 (um) a 3 (três). O tensor C_{ijkl} relaciona cada um dos nove componentes do tensor de deformação a cada uma das nove componentes do tensor de tensão. O tensor S_{ijkl} , por outro lado, faz esta inter-relação de maneira inversa.

A partir do fato associado às seguintes derivações:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \quad (3.28)$$

e

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad (3.29)$$

pode-se concluir que $C_{ijkl} = C_{klij}$.

Retomando-se a expressão $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$, o tensor C_{ijkl} acena para a existência de 81 (oitenta e um) elementos. Não obstante, deve-se lembrar que tanto o tensor das tensões como o tensor das deformações são simétricos. Direcionando-se estes conceitos à expressão $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$, tem-se:

² O tensor de compliância é também chamado, na análise matricial, de matriz de flexibilidade.

Simetria do tensor de tensões (σ_{ij}):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ji} = C_{jikl} \varepsilon_{kl} \quad (3.30)$$

e daí:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (3.31)$$

Por outro lado, pela simetria do tensor das deformações (ε_{ij}):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijlk} \varepsilon_{lk} \quad (3.32)$$

e portanto:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (3.33)$$

Nesse sentido, dos 81 (oitenta e um) elementos, ao se aplicar (3.31), sobram 54 (cinquenta e quatro) elementos e quando se vincula (3.33), sobram 36 (trinta e seis) elementos. Entretanto, o tensor C_{ijkl} é simétrico em relação aos pares (i, j) e (k, l). Com efeito, dos 36 (trinta e seis) elementos, tem-se, assim, somente 21 elementos do tensor constitutivo C_{ijkl} . As mesmas considerações se aplicam ao tensor de compliância S_{ijkl} .

3.4.3 Representação Material das Leis Constitutivas

Tendo-se em vista a simetria dos tensores de tensão e de deformação, é possível constatar as identidades:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \sigma_{21} & \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{21} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} & \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{31} \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} & \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{32} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dessa forma, as nove equações que caracterizam as expressões tensoriais das leis constitutivas podem ser condensadas em seis equações com seis termos cada uma.

Neste sentido, a lei constitutiva $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ pode também ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ & & & & C_{2323} & C_{2331} \\ & \text{Sim.} & & & & C_{3131} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Ou simplesmente, em forma matricial:

$$\sigma = C\varepsilon \quad (3.36)$$

De modo análogo, $\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$ fica sendo:

$$\varepsilon = S\sigma \quad (3.37)$$

ou:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1112} & 2S_{1123} & 2S_{1131} \\ & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2212} & 2S_{2223} & 2S_{2231} \\ & & S_{3333} & 2S_{3312} & 2S_{3323} & 2S_{3331} \\ & & & 4S_{1212} & 4S_{1223} & 4S_{1231} \\ & & & & 4S_{2323} & 4S_{2331} \\ & \text{Sim.} & & & & 4S_{3131} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

Observa-se que os valores $2\varepsilon_{12}$, $2\varepsilon_{23}$ e $2\varepsilon_{31}$ podem ser substituídos por γ_{12} , γ_{23} , γ_{31} e as tensões σ_{12} , σ_{23} , σ_{31} por τ_{12} , τ_{23} , τ_{31} .

Introduzindo-se uma notação reduzida, apresentada por TING (1996):

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_1, & \sigma_{23} &= \sigma_4 \\ \sigma_{22} &= \sigma_2, & \sigma_{31} &= \sigma_5\end{aligned}\tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= \sigma_3, & \sigma_{12} &= \sigma_6 \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1, & 2\varepsilon_{23} &= \varepsilon_4 \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2, & 2\varepsilon_{31} &= \varepsilon_5 \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3, & 2\varepsilon_{12} &= \varepsilon_6\end{aligned}\tag{3.40}$$

Assim, a lei constitutiva (3.35) pode ser escrita como:

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta\tag{3.41}$$

e (3.38):

$$\varepsilon_\alpha = S_{\alpha\beta} \sigma_\beta\tag{3.42}$$

A transformação entre C_{ijkl} e $C_{\alpha\beta}$ é efetuada substituindo-se os subscritos ij (ou kl) por α (ou β) usando-se as seguintes regras:

TABELA 3.1: Regras de transformação entre ij (ou kl) e α (ou β).

ij (ou kl)		α (ou β)
11	\Leftrightarrow	1
22	\Leftrightarrow	2
33	\Leftrightarrow	3
23 ou 32	\Leftrightarrow	4
31 ou 13	\Leftrightarrow	5
12 ou 21	\Leftrightarrow	6

Fonte: TING (1996).

Para a transformação entre S_{ijkl} e $S_{\alpha\beta}$ utiliza-se as mesmas regras, porém considerando-se:

$$S_{ijkl} = S_{\alpha\beta} \quad \text{se } \alpha \text{ e } \beta \leq 3;$$

$$2S_{ijkl} = S_{\alpha\beta} \quad \text{se } \alpha \text{ ou } \beta \leq 3;$$

$$4S_{ijkl} = S_{\alpha\beta} \quad \text{se } \alpha \text{ e } \beta > 3.$$

Assim, é possível escrever:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{Sim.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

e também,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ \text{Sim.} & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

3.4.4 Constantes Independentes dos Tensores S_{ij} e C_{ij}

Através da análise apresentada até aqui, foi obtida uma redução significativa de elementos diferentes entre si dos tensores C_{ij} e S_{ij} . Porém, segundo MASCIA (1991), e outros autores como NOVOZHILOV (1961), LEKHNITSKII (1981) e FUSCO (1989), o número de coeficientes independentes nos tensores C_{ij} e S_{ij} para materiais elásticos anisotrópicos, não é 21 (vinte e um) mas sim 18 (dezoito).

Se o tensor σ_{ij} for diagonalizado, ou seja, referido às novas direções principais, por meio de uma conveniente mudança de base, ele passa a ter 3 (três) elementos nulos, ou seja:

$$\sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0 \quad (3.45)$$

Nestas condições, têm-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

Embora o tensor de tensões σ_{ij} tenha sido diagonalizado, nada obriga que o tensor das deformações ε_{ij} também o seja, pois as direções principais de ambos não são necessariamente coincidentes.

Discretizando as 3 (três) últimas relações do sistema, obtém-se expressões iguais a zero,

$$\begin{aligned} 0 &= C_{41}\varepsilon_1 + C_{42}\varepsilon_2 + C_{43}\varepsilon_3 + C_{44}\varepsilon_4 + C_{45}\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_6 \\ 0 &= C_{51}\varepsilon_1 + C_{52}\varepsilon_2 + C_{53}\varepsilon_3 + C_{54}\varepsilon_4 + C_{55}\varepsilon_5 + C_{56}\varepsilon_6 \\ 0 &= C_{61}\varepsilon_1 + C_{62}\varepsilon_2 + C_{63}\varepsilon_3 + C_{64}\varepsilon_4 + C_{65}\varepsilon_5 + C_{66}\varepsilon_6 \end{aligned} \quad (3.47)$$

nas quais, os coeficientes C_{ij} que aí aparecem não podem ser todos simultaneamente nulos. De fato, se isso fosse possível, pelas expressões (3.43) resultaria que para quaisquer estados de deformações $\{\varepsilon\}$ aplicados corresponderiam sempre estados de tensões com as direções principais coincidentes com as direções da base onde estão definidos esses coeficientes. Com efeito, para um estado de tensões principais, suas respectivas direções principais não coincidem, via de regra, num material anisotrópico, com suas direções principais de deformação.

Desta forma, as 3 (três) últimas relações estabelecem condições de dependência dos elementos que a elas pertencem. Conclui-se então que, dos 21 (vinte e um) termos de C_{ij} , somente

18 (dezoito) são independentes entre si. Semelhante procedimento pode ser feito para as relações com o tensor S_{ij} .

3.4.5 Representação das Constantes de Elasticidade

De acordo com LEKHNITSKII (1981), muitos autores representam as constantes de elasticidade através das chamadas constantes de engenharia, onde estão inseridos os termos módulo de elasticidade longitudinal ou de Young (E_i), coeficientes de Poisson (ν_{ij}) e módulo de elasticidade transversal ou de rigidez (G_{ij}). Essas representações surgem nos casos especiais de anisotropia, mais particularmente nos casos básicos de simetria elástica, a que estão expostas as estruturas do sólido anisotrópico.

Outros autores, como por exemplo, RABINOVICH, apud LEKHNITSKII (1981), introduziram símbolos para as constantes de S_{ij} , especificamente, no caso de anisotropia homogênea. São estabelecidas as seguintes equações para a lei constitutiva:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E_{xx}} (\sigma_x - \nu_{yx} \sigma_y - \nu_{zx} \sigma_z + \eta_{yz,x} \tau_{yz} + \eta_{zx,x} \tau_{xz} + \eta_{xy,x} \tau_{xy}) \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E_{yy}} (-\nu_{xy} \sigma_x + \sigma_y - \nu_{zy} \sigma_z + \eta_{yz,y} \tau_{yz} + \eta_{zx,y} \tau_{xz} + \eta_{xy,y} \tau_{xy}) \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E_{zz}} (-\nu_{xz} \sigma_x - \nu_{yx} \sigma_y + \sigma_z + \eta_{yz,z} \tau_{yz} + \eta_{zx,z} \tau_{xz} + \eta_{xy,z} \tau_{xy}) \\
 \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{yz}} (\eta_{x,yz} \sigma_x + \eta_{y,yz} \sigma_y + \eta_{z,yz} \sigma_z + \tau_{yz} + \mu_{zx,yz} \tau_{xz} + \mu_{xy,yz} \tau_{xy}) \\
 \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{xz}} (\eta_{x,zx} \sigma_x + \eta_{y,zx} \sigma_y + \eta_{z,zx} \sigma_z + \mu_{yz,zx} \tau_{yz} + \tau_{xz} + \mu_{xy,zx} \tau_{xy}) \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} (\eta_{x,xy} \sigma_x + \eta_{y,xy} \sigma_y + \eta_{z,xy} \sigma_z + \mu_{yz,xy} \tau_{yz} + \mu_{zx,xy} \tau_{xz} + \tau_{xy})
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Nas equações, E_{xx} , E_{yy} , E_{zz} são o módulo de Young na tração – compressão nas direções dos eixos x , y , z ; G_{yz} , G_{xz} , G_{xy} são os módulos de rigidez para os planos paralelos aos planos coordenados; ν_{yx} , ν_{zx} ,, ν_{yz} são os coeficientes de Poisson caracterizando a contração (ou extensão) na direção de um eixo quando a tração (ou compressão) é aplicada na direção de outro eixo. As outras constantes que aparecem nas equações são nulas para um corpo isotrópico (ou ortotrópico), mas, importantes para um corpo anisotrópico, pois quantificam as influências de tensões normais em deformações tangenciais e de tensões tangenciais em deformações normais (MASCIA, 1991).

As constantes $\mu_{zx,yz}$ $\mu_{zx,xy}$ são chamadas de coeficientes de Chentsov. Eles caracterizam distorções em planos paralelos aos planos coordenados produzidas por tensões tangenciais agindo em outros planos paralelos aos planos coordenados.

As constantes $\eta_{yz,x}$, $\eta_{zx,x}$,, $\eta_{xy,z}$ são chamadas, de acordo com RABINOVICH, apud LEKHNITSKII (1981), de coeficientes de influência mútua de 1ª espécie. Eles caracterizam extensões nas direções dos eixos principais produzidas por tensões tangenciais agindo nos planos coordenados.

Por fim, tem-se os coeficientes de influência mútua de 2ª espécie, $\eta_{x,yz}$, $\eta_{y,zx}$,, $\eta_{z,xy}$ que expressam, de acordo com LEKHNITSKII (1981), deformações tangenciais nos planos principais, causadas pelas tensões normais que atuam nos planos coordenados.

MASCIA (1991) determinou experimentalmente, através de ensaios de compressão simples, alguns valores para os coeficientes de influência mútua de 1ª e 2ª espécie para algumas espécies de madeiras. Os resultados estão apresentados nas Tabelas 3.2 e 3.3 a seguir:

TABELA 3.2 – Coeficientes de Influência Mútua de 2ª Espécie.

Espécies de Madeira	$\eta_{L,LT}$	$\eta_{L,LR}$	$\eta_{R,RT}$
Angico	1,1485	0,7578	0,3691
Ipê	1,1311	0,9234	0,5901
Pinus	1,1001	0,7390	0,3094
Guapuruvú	0,6456	0,6799	0,2273

OBS: L – longitudinal; T – tangencial; R – radial.

Fonte: MASCIA (1991).

TABELA 3.3 – Coeficientes de Influência Mútua de 1ª Espécie.

Espécies de Madeira	Guapuruvú	Ipê	Pinus	Angico
$\eta_{LT,L}$	0,5364	1,3051	2,6407	0,7298

Fonte: MASCIA (1991).

3.4.6 Transformação de Coordenadas para Componentes de Tensão e de Deformação

Segundo LEKHNITSKII (1981) frequentemente ocorrem na prática da engenharia, casos onde há a necessidade de se expressar as componentes de tensão (ou de deformação), conhecidas para um sistema de coordenadas, em um novo sistema. Para isso, é necessário que ambos sistemas de coordenadas sejam ortogonais, mas não necessariamente cartesianos.

A seguir, são apresentados, de forma objetiva, alguns conceitos sobre transformação de coordenadas e as suas implicações sobre as componentes de tensão e de deformação, bem como sobre as constantes de elasticidade presentes nos tensores constitutivos S_{ij} e C_{ij} .

3.4.6.1 Matriz de Transformação de Coordenadas

Quando um vetor, que é uma quantidade física independente de qualquer sistema de coordenadas, é introduzido num sistema de coordenadas ele é representado por suas componentes, que são diferentes em diferentes sistemas de coordenadas.

Seja v um vetor e v_i seus componentes (MASCIA, 1998):

$$v = v_i e_i \quad (3.49)$$

e e_i os vetores unitários que formam a base do sistema de coordenadas. Considerando agora v_i^* os componentes de v e e_i^* os vetores unitários de um outro sistema de coordenadas obtidos a partir de uma rotação de e_i com a mesma origem O . Então:

$$v = v_i^* e_i^* \quad (3.50)$$

Seja agora:

$$l_{ij} = e_i^* e_j \quad (3.51)$$

onde l_{ij} são os cossenos diretores de e_i^* relativo ao primeiro sistema de coordenadas e_i . Então os l_{ij} são os componentes de e_i^* no primeiro sistema de coordenadas. Assim:

$$e_i^* = l_{ij} e_j \quad (3.52)$$

e a relação recíproca de $e_i^* = l_{ij} e_j$ é:

$$e_i = l_{ij}^* e_j^* \quad (3.53)$$

Considerando-se agora o seguinte desenvolvimento:

$$v = v_i^* e_i^* = v_j e_j = v_j l_{ij}^* e_i^* \quad (3.54)$$

Assim:

$$v_i^* = l_{ij} v_j \quad (3.55)$$

e reciprocamente:

$$v_i = l_{ji} v_j^* \quad (3.56)$$

Pode-se então relacionar as componentes de v em quaisquer dois sistemas de coordenadas através da matriz de transformação l_{ij} .

No caso de tensores de segunda ordem, a transformação de coordenadas será:

$$v_{ij}^* = l_{ik} l_{jm} v_{km} \quad (3.57)$$

Essas transformações podem ser generalizadas para qualquer ordem de tensores. Para tensores de 4ª ordem:

$$v_{ijkl}^* = l_{im} l_{jn} l_{kp} l_{lq} v_{mnpq} \quad (3.58)$$

Pode-se expressar a matriz de transformação l_{ij} para o caso de uma rotação positiva θ , sentido anti-horário, em torno do eixo coordenado x_3 :

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Matrizes equivalentes a essas podem ser obtidas quando da rotação em torno dos outros eixos coordenados.

3.4.6.2 Componentes de Tensão e de Deformação

LEKHNITSKII (1981), trabalhando no sistema cartesiano de coordenadas, utilizou a matriz de transformação l_{ij} para a transformação dos componentes de tensão e de deformação. Na **Tabela 3.4**, estão associados os cossenos diretores dos ângulos entre os eixos do antigo (x_i) e do novo sistema de coordenadas (x'_i):

TABELA 3.4 – Cossenos diretores.

	x	y	z
x'	l_{11}	l_{12}	l_{13}
y'	l_{21}	l_{22}	l_{23}
z'	l_{31}	l_{32}	l_{33}

Fonte: LEKHNITSKII (1981).

onde l_{ij} representa a matriz de transformação.

Denotando-se todas as componentes de tensão pela letra σ com dois subscritos, onde subscritos iguais representam componentes de tensões normais e subscritos diferentes, componentes de tensões tangenciais, as seis fórmulas para a transformação das componentes de tensão para novos eixos são escritas pela fórmula indicial:

$$\sigma'_{kl} = l_{ki} l_{lj} \sigma_{ij} \quad (3.60)$$

ou de modo similar, para a relação inversa:

$$\sigma_{ij} = l_{ik} l_{jl} \sigma'_{kl} \quad (3.61)$$

Para a transformação dos componentes de tensão num sistema de coordenadas, a **Tabela 3.5** substitui a **Tabela 3.4**, quando se tem uma rotação θ em torno de um eixo, por exemplo o eixo z.

TABELA 3.5: Cossenos diretores para um sistema cilíndrico.

	x	y	z
x'	cos θ	sen θ	0
y'	-sen θ	cos θ	0
z'	0	0	1

Fonte: LEKHNITSKII (1981).

A transformação dos componentes de deformação para novos eixos é feita de maneira similar a transformação dos componentes de tensão. Comparando-se esses dois tensores, observa-se que as tensões normais σ correspondem as deformações normais ϵ , e as tensões cisalhantes τ correspondem a $\frac{1}{2}\gamma$.

3.4.7 Transformação de Coordenadas para Propriedades de Elasticidade

Sendo a relação entre tensões e deformações escrita por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3.62)$$

onde C_{ijkl} é o tensor de constantes de elasticidade, num outro sistema de coordenadas esta relação tornar-se-ia:

$$\sigma_{rs}^* = C_{rspq}^* \epsilon_{pq}^* \quad (3.63)$$

Com:

$$\sigma_{rs}^* = l_{ri} l_{sj} \sigma_{ij} \quad (3.64)$$

$$\varepsilon_{kl} = l_{pk} l_{ql} \varepsilon_{pq}^* \quad (3.65)$$

o que resulta:

$$C_{rspq}^* \varepsilon_{pq}^* = \sigma_{rs}^* = l_{ri} l_{sj} \sigma_{ij} \quad \text{mas } \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

então,

$$C_{rspq}^* \varepsilon_{pq}^* = l_{ri} l_{sj} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{mas } \varepsilon_{kl} = l_{pk} l_{ql} \varepsilon_{pq}^*$$

então,

$$C_{rspq}^* \varepsilon_{pq}^* = l_{ri} l_{sj} C_{ijkl} l_{pk} l_{ql} \varepsilon_{pq}^* \quad \text{e segue-se que:}$$

$$C_{rspq}^* = l_{ri} l_{sj} l_{pk} l_{ql} C_{ijkl} \quad (3.66)$$

Analogamente para a relação inversa entre tensões e deformações têm-se:

$$S_{rspq}^* = l_{ri} l_{sj} l_{pk} l_{ql} S_{ijkl} \quad (3.67)$$

LEKHNITSKII (1981) apresenta estas relações constitutivas também em forma tensorial reduzida através de:

$$C_{ij}^* = q_{im} q_{jn} C_{mn} \quad (3.68)$$

$$S_{ij}^* = q_{im} q_{jn} S_{mn} \quad (3.69)$$

onde utiliza os coeficientes de transformação q_{ij} , também utilizados por CAUWELAERT (1977), e apresentados na Tabela 3.6, sendo que o primeiro subscrito indica linha e o segundo indica a coluna da tabela.

TABELA 3.6 – Coeficientes q_{ij} .

	1	2	3	4	5	6
1	l_{11}^2	l_{12}^2	l_{13}^2	$l_{11}l_{12}$	$l_{12}l_{13}$	$l_{31}l_{11}$
2	l_{21}^2	l_{22}^2	l_{23}^2	$l_{22}l_{21}$	$l_{23}l_{22}$	$l_{23}l_{21}$
3	l_{31}^2	l_{32}^2	l_{33}^2	$l_{32}l_{31}$	$l_{33}l_{32}$	$l_{33}l_{31}$
4	$2l_{21}l_{11}$	$2l_{12}l_{22}$	$2l_{13}l_{23}$	$l_{11}l_{22} + l_{12}l_{21}$	$l_{13}l_{32} + l_{12}l_{23}$	$l_{13}l_{21} + l_{11}l_{23}$
5	$2l_{31}l_{21}$	$2l_{32}l_{22}$	$2l_{33}l_{23}$	$l_{31}l_{22} + l_{32}l_{21}$	$l_{33}l_{22} + l_{32}l_{23}$	$l_{33}l_{21} + l_{31}l_{23}$
6	$2l_{31}l_{11}$	$2l_{32}l_{12}$	$2l_{33}l_{13}$	$l_{31}l_{12} + l_{32}l_{11}$	$l_{33}l_{12} + l_{32}l_{13}$	$l_{33}l_{11} + l_{31}l_{13}$

Fonte: LEKHNITSKII (1981).

Com o auxílio dos coeficientes q_{ij} , dependentes dos cossenos diretores l_{ij} (apresentados nas Tabelas 3.4 e 3.5), é possível obter os novos termos do tensor de complância S'_{ij} , após a transformação de coordenadas, através de uma rotação dos eixos coordenados x e y sobre o eixo z de um ângulo arbitrário θ . Como exemplo, tem-se a transformação das constantes S_{11} e S_{12} :

$$S'_{11} = S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + 2(S_{16} \cos^2 \theta + S_{26} \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \quad (3.70)$$

$$S'_{12} = (S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} + (S_{16} - S_{26}) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \quad (3.71)$$

Semelhantes transformações podem ser efetuadas com as outras constantes do tensor de complância e com as constantes do tensor constitutivo C_{ij} .

3.5 Classificação dos Materiais Segundo o Número de Planos de Simetria Elástica

De um modo geral, segundo LEKHNITSKII (1981), todos os materiais podem ser divididos, por um lado, em homogêneos e não homogêneos, e por outro lado, em isotrópicos e anisotrópicos. A maioria dos materiais estruturais exibe algum grau de anisotropia. Materiais, como a madeira, são naturalmente anisotrópicos, outros, como os compósitos laminados, são anisotrópicos devido ao processo de fabricação (LOURENÇO, 2000).

No que concerne a um sólido homogêneo, a nível de propriedades de elasticidade, estas são invariantes para todos os pontos referentes a um sistema de coordenadas x_i . Em um sólido não-homogêneo, as propriedades de elasticidade não se apresentam as mesmas, para diferentes pontos de x_i .

LEKHNITSKII (1981) classifica como isotrópico o sólido cujas propriedades de elasticidade são constantes para quaisquer direções estabelecidas a partir de um determinado ponto, ou seja, são invariantes para todas as transformações de coordenadas x_i . Noutro sentido, um sólido anisotrópico, em geral, exibe diferentes propriedades de elasticidade para direções diferentes associadas a um ponto dado. As direções nas quais as propriedades de elasticidade se mantêm são denominadas direções elasticamente equivalentes ou direções principais de elasticidade. Ainda, segundo MUSKHELISHVILI (1963), um sólido, o qual é isotrópico e homogêneo em relação a uma propriedade, pode ser anisotrópico e não-homogêneo em relação a outras propriedades.

De acordo com LEKHNITSKII (1981), se a estrutura de um corpo anisotrópico apresenta algum tipo de simetria, as suas propriedades de elasticidade também a exibem. A simetria elástica expressa o fato de que em cada ponto do sólido existem direções simétricas equivalentes com respeito as propriedades elásticas.

Se há simetria das propriedades elásticas de um corpo anisotrópico, então as equações da lei de Hooke generalizada para ele podem ser simplificadas, ou seja, podem ocorrer diversas simplificações nos tensores S_{ij} e C_{ij} . LEKHNITSKII (1981), procurando realizar tais simplificações, desenvolve as leis constitutivas em relação a dois sistemas simétricos de coordenadas e compara as expressões obtidas, identificando assim, as simetrias existentes.

3.5.1 Material com Simetria Elástica em um Plano

Considerando-se um plano, de um determinado sólido, referido a um sistema de coordenadas x_i , conforme mostra a Figura 3.8:

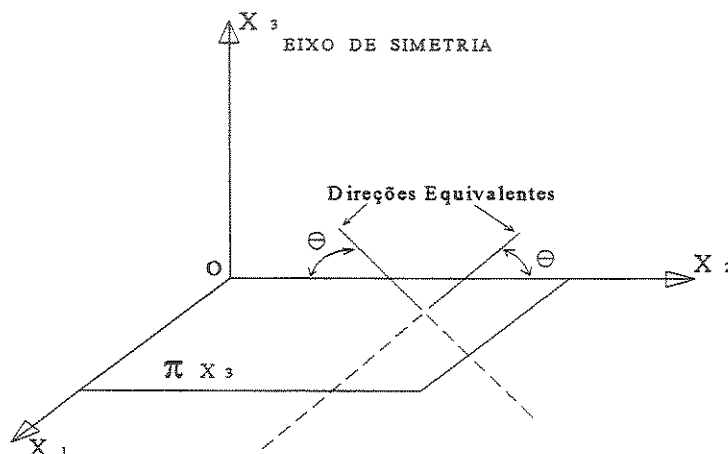


FIGURA 3.8 – Simetria elástica em 1 (um) plano.

Fonte: MASCIA (1991).

o plano $x_1 - x_2$ é de simetria elástica, ou seja, duas direções quaisquer passando por um ponto neste plano são equivalentes no que concerne às propriedades de elasticidade. A direção normal a este plano é chamada de direção principal de elasticidade.

Promovendo-se rotações de 180° em torno do eixo x_3 , (Figura 3.9):

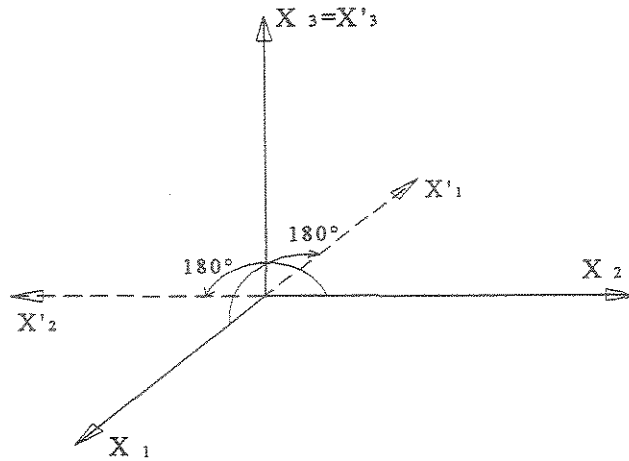


FIGURA 3.9 – Rotação de 180° em torno do eixo x_3 .

Fonte: MASCLA (1991).

têm-se os seguintes cossenos diretores:

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Com o uso da transformação tensorial de S_{11} têm-se:

$$S'_{11} = q_{1m} q_{1n} S_{mn} \quad (3.73)$$

Resultando:

$$S'_{11} = l^4_{11} S_{11} \quad (3.74)$$

devido as demais parcelas que contribuem para S'_{11} serem nulas.

Assim:

$$S'_{11} = S_{11} \quad (3.75)$$

De semelhante análise para os outros dois termos do tensor, conclui-se que:

$$S_{15} = S_{16} = S_{25} = S_{26} = S_{35} = S_{36} = S_{45} = S_{46} = 0 \quad (3.76)$$

Então, o tensor S_{ij} para um material com simetria elástica em 1 (um) plano, conhecido também como material monoclinico (COWIN & MEHRABADI, 1987), torna-se:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & 0 & 0 \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & S_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Com isto o tensor S_{ij} passa a ter 13 (treze) componentes diferentes, sendo que apenas 11 (onze) são independentes, devido a dependência linear entre os termos S_{55} , S_{56} e S_{66} . Semelhante análise pode ser realizada com o tensor C_{ij} .

Para LEKHNITSKII et al. (1968), se o eixo z é tomado normal ao plano de simetria elástica e os outros dois eixos contidos neste plano, as equações constitutivas são escritas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y + S_{13}\sigma_z + S_{16}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= S_{12}\sigma_x + S_{22}\sigma_y + S_{23}\sigma_z + S_{26}\tau_{xy} \\ \varepsilon_z &= S_{13}\sigma_x + S_{23}\sigma_y + S_{33}\sigma_z + S_{36}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= S_{44}\tau_{yz} + S_{45}\tau_{xz} \\ \gamma_{xy} &= S_{45}\tau_{yz} + S_{55}\tau_{xz} \\ \gamma_{xy} &= S_{16}\sigma_x + S_{26}\sigma_y + S_{36}\sigma_z + S_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (3.78)$$

LEKHNITSKII et al. (1968) apresentaram um exemplo onde demonstram as propriedades de um corpo possuindo um plano de simetria elástica. Considere-se um elemento do corpo na forma de um paralelepípedo retangular, dois lados do qual são paralelos ao plano de simetria elástica, e estão submetidos à tração, ou a compressão, pela tensão normal σ_z , conforme Figura 3.10:

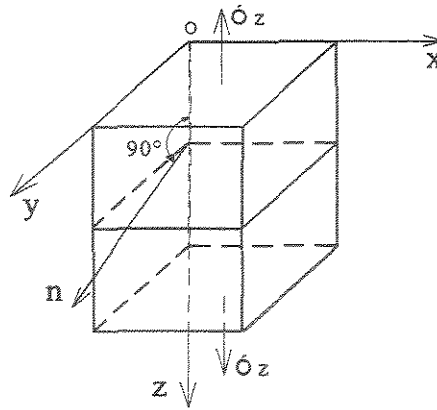


FIGURA 3.10 – Paralelepípedo retangular possuindo 1 (um) plano de simetria elástica.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

A deformação deste elemento é caracterizada pelo alongamento relativo e distorções, as quais podem ser encontradas pelas equações 3.78:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= S_{13} \sigma_z & \gamma_{yz} &= 0 \\
 \epsilon_y &= S_{23} \sigma_z & \gamma_{xz} &= 0 \\
 \epsilon_z &= S_{33} \sigma_z & \gamma_{xy} &= S_{36} \sigma_z
 \end{aligned}
 \tag{3.79}$$

O coeficiente S_{36} representa a deformação tangencial no plano xy , ou seja, uma distorção neste plano. Assim, no estado final do sólido, haveria composição de deformações normais e distorções em planos paralelos a xy . Observa-se que as faces laterais permanecem retangulares, pois os coeficiente γ_{yz} e γ_{xz} são nulos.

3.5.2 Material com Simetria Elástica em Três Planos (Material Ortótropo)

Um sólido, referido a um sistema de coordenadas x_i , é denominado de material ortótropo ou ortotrópico, quando possui três planos de simetria mutuamente perpendiculares, com eixos de simetria x_i .

Admitindo-se um plano deste sólido, referido a um sistema de coordenadas x_i , e procedendo-se agora uma rotação de 180° em torno do eixo x_1 , conforme Figura 3.11, tem-se , analogamente ao caso do material com um plano de simetria,

$$S_{14} = S_{24} = S_{34} = S_{56} = 0 \quad (3.80)$$

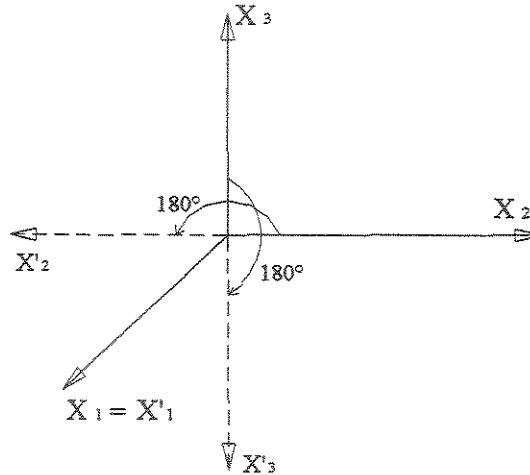


FIGURA 3.11 – Rotação de 180° em torno do eixo x_1 .

Fonte: MASCIA (1991).

Efetuando-se semelhantes rotações nos eixos x_2 e x_3 , uma de cada vez, tem-se:

$$S_{16} = S_{26} = S_{36} = S_{54} = 0 \quad (3.81)$$

$$S_{15} = S_{25} = S_{35} = S_{56} = 0 \quad (3.82)$$

E o tensor S_{ij} fica com a seguinte forma:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Procedimento análogo pode ser aplicado ao tensor C_{ij} .

Segundo LEKHNITSKII et al. (1968), quando 3 (três) planos mutuamente perpendiculares de simetria elástica passam através de todos os pontos de um corpo homogêneo, as equações da lei de Hooke generalizada, referindo-se a um sistema de coordenadas x, y, z serão:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y + S_{13}\sigma_z \\
 \varepsilon_y &= S_{12}\sigma_x + S_{22}\sigma_y + S_{23}\sigma_z \\
 \varepsilon_z &= S_{13}\sigma_x + S_{23}\sigma_y + S_{33}\sigma_z \\
 \gamma_{yz} &= S_{44}\tau_{yz} \\
 \gamma_{xy} &= S_{55}\tau_{xy} \\
 \gamma_{xz} &= S_{66}\tau_{xz}
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Assim, para um material possuindo 3 (três) planos de simetria elástica, o número de constantes independentes será 9 (nove). Um elemento de um corpo ortotrópico na forma de um paralelepípedo retangular com lados paralelos aos planos de simetria elástica e com tensão normal aplicada em um de seus lados, conforme Figura 3.10, permanece sem alteração de forma, ou seja, não ocorrerão distorções em seus planos. O sólido somente muda suas dimensões originais.

Dentre os tipos de simetria elástica, a ortotrópica é a mais importante, pois é encontrada muitas vezes em casos práticos. De acordo com MELESH (1963), relações tensão-deformação ortotrópicas fornecem suficiente generalidade para descrever a maioria dos materiais estruturais. Segundo JAYNE & SUDDARTH (1966), a maioria dos materiais fibrosos, quer sejam de origem natural ou reconstituídos, podem ser classificados fisicamente como ortotrópicos.

A madeira constitui-se num exemplo importante de material ortotrópico, onde os eixos de simetria elástica seriam os eixos longitudinal, radial e tangencial, conforme pode ser visto na Figura 3.12, onde também são mostrados os eixos principais de elasticidade para a madeira.

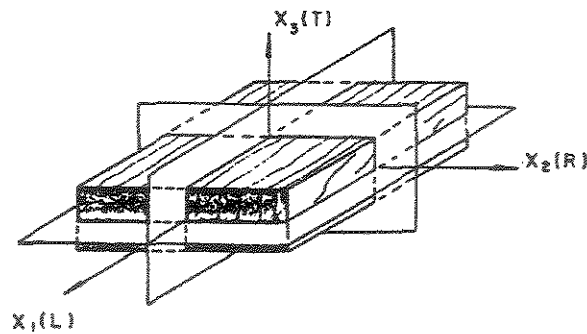


FIGURA 3.12 - Eixos ortotrópicos e planos de ortotropia na madeira.

Fonte: BODIG & JAYNE (1982).

Assim, ao se estudar a madeira, deve-se compatibilizar as causas e os efeitos no sistema de referência principal, caso contrário o tensor S_{ij} não teria somente nove elementos independentes e o estudo recairia em situações complexas.

3.5.3 Material Transversalmente Isotrópico (Um Plano de Isotropia)

Segundo FUSCO (1993) os materiais transversalmente isotrópicos são os que apresentam um plano de simetria física dentro do qual todas as direções são materialmente equivalentes.

Considerando-se um plano de um sólido referido a um sistema de coordenadas, conforme Figura 3.13, onde o plano $x_1 - x_2$ é dito de isotropia, ou seja, todas as direções contidas neste plano são elasticamente equivalentes, o eixo x_3 é o eixo de simetria elástica.

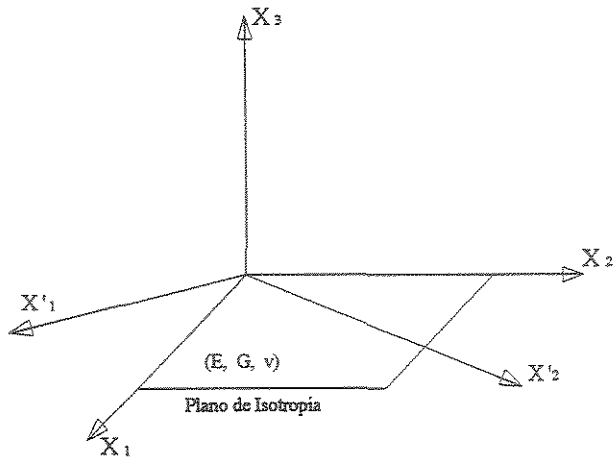


FIGURA 3.13– Plano de isotropia – material transversalmente isotrópico.

Fonte: MASCIA (1991).

Baseando-se nas equações dos itens anteriores, tem-se:

$$S_{11} = S_{22}; \quad S_{13} = S_{23}; \quad S_{55} = S_{66}; \quad 2(S_{11} - S_{22}) = S_{44} \quad (3.85)$$

Assim, com a utilização da notação usual em engenharia, o tensor S_{ij} torna-se:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu'}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu'}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu'}{E} & -\frac{\nu'}{E} & \frac{1}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

onde E , E' são, respectivamente, o módulo de elasticidade no plano de isotropia e na direção normal a ele;

ν , ν' : coeficiente de Poisson no plano de isotropia e na direção normal a ele;

G, G' : módulo de elasticidade transversal no plano de isotropia e na direção normal a ele. E também:

$$2(S_{11} - S_{12}) = S_{44} \quad (3.87)$$

ou

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.88)$$

Portanto, apenas 5 (cinco) coeficientes de S_{ij} são independentes. O módulo de elasticidade transversal G indica a isotropia no plano.

3.5.4 Material Isotrópico

Um corpo isotrópico é aquele em que todos os planos que passam por um ponto são isotrópicos, ou seja, todas as direções são elasticamente equivalentes e principais.

Assim:

$$E' = E; \quad G' = G \quad \text{e} \quad \nu' = \nu \quad (3.89)$$

O tensor S_{ij} torna-se:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Portanto, o tensor S_{ij} passa a ter apenas 2 (dois) coeficientes independentes, ou seja, o módulo de elasticidade longitudinal E e o coeficiente de Poisson ν , sendo que o módulo de elasticidade transversal G é definido como:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.91)$$

Para corpos isotrópicos, quando da ocorrência de transformação de coordenadas, de um sistema x, y, z para um x', y', z' as constantes elásticas preservam seus valores numéricos.

Segundo MUSKHELISHVILI (1963), não existe na natureza corpos idealmente isotrópicos, mas muitos materiais, alguns importantes, podem ser suficientemente aproximados como isotrópicos, como por exemplo os metais, que são constituídos de microscópicos cristais anisotrópicos distribuídos arbitrariamente no material, conferindo assim, isotropia aos sólidos constituídos desse material.

3.6 Anisotropia Curvilinear

Abordados os conceitos sobre simetria elástica e de como os materiais são classificados segundo esta simetria, pode-se, neste momento, definir um outro tipo de anisotropia, chamada de curvilinear.

De acordo com LEKHNITSKII (1981), num sólido homogêneo possuindo anisotropia retilinear, todas as direções paralelas são equivalentes com respeito as propriedades elásticas, e todos os elementos na forma de paralelepípedo retangular com respectivas faces paralelas tem as mesmas propriedades de elasticidade. Mas, sólidos homogêneos podem ter anisotropia retilinear ou curvilinear.

Segundo LEKHNITSKII (1981), a anisotropia curvilinear de um sólido homogêneo é caracterizada pelo fato que as direções equivalentes não são paralelas, mas obedecem a outras leis. Se escolher um sistema de referência com coordenadas curvilineares ortogonais, de tal modo que as direções em cada ponto coincidam com as direções equivalentes, relativas as propriedades de elasticidade, então os elementos infinitesimais, isolados por três pares de planos coordenados terão as mesmas propriedades de elasticidade.

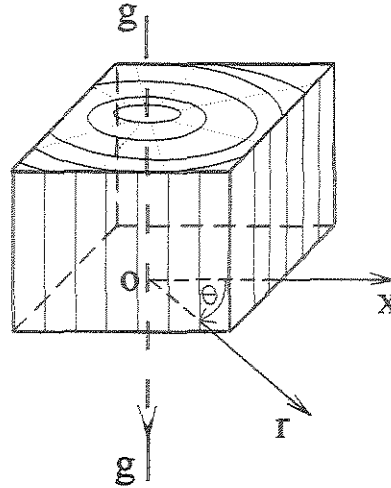


FIGURA 3.14 – Sólido homogêneo com anisotropia curvilinear.

Fonte: LEKHNITSKII (1981).

Considerando-se, então, um sólido homogêneo com anisotropia curvilinear e que obedeça a lei de Hooke generalizada, as coordenadas em questão são ξ , η , ζ . Assumindo-se que exista um potencial elástico, a lei de Hooke generalizada neste caso pode ser escrita, de forma matricial, por (LEKHNITSKII, 1981):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\eta\eta} \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} \\ \varepsilon_{\xi\eta} \\ \varepsilon_{\eta\zeta} \\ \varepsilon_{\zeta\xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1112} & S_{1123} & S_{1131} \\ & S_{2222} & S_{2233} & S_{2212} & S_{2223} & S_{2231} \\ & & S_{3333} & S_{3312} & S_{3323} & S_{3331} \\ & & & S_{1212} & S_{1223} & S_{1231} \\ & \text{Sim.} & & & S_{2323} & S_{2331} \\ & & & & & S_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{\xi\xi} \\ \sigma_{\eta\eta} \\ \sigma_{\zeta\zeta} \\ \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} \end{Bmatrix} \quad (3.92)$$

Estas equações contém, em geral, 21 (vinte e uma) constantes de elasticidade, mas, da mesma maneira que um sólido anisotrópico linear, somente 18 (dezoito) delas são independentes.

Neste caso, as equações da lei de Hooke podem ser escritas num sistema ortogonal, mas os termos S_{ijkl} não seriam constantes na anisotropia curvilinear, devido a mudança de direção das coordenadas. A equação tensorial (3.92) pode ser simplificada se o corpo exibir simetria elástica, e estas simplificações são as mesmas do caso de anisotropia retilinear. Assim, pode-se falar de ortotropia curvilinear, isotropia transversal para qualquer ξ, η, ζ .

Por outro lado, segundo LEKHNITSKII (1981), o conceito de anisotropia curvilinear pode ser generalizado para sólidos não homogêneos, uma vez que S_{ijkl} é função da posição, assim, o problema pode ficar ainda mais complexo.

Dos diversos tipos de anisotropia curvilinear, dois são mais importantes:

- Anisotropia cilíndrica;
- Anisotropia esférica;

Neste trabalho, porém, somente é de interesse a anisotropia cilíndrica. Tomando-se o eixo de anisotropia g como eixo z de um sistema de coordenadas cilíndrico r, θ, z pode-se escrever a lei de Hooke como:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= S_{11}\sigma_r + S_{12}\sigma_\theta + S_{13}\sigma_z + S_{14}\tau_{\theta z} + S_{15}\tau_{rz} + S_{16}\tau_{r\theta} \\
 \varepsilon_\theta &= S_{12}\sigma_r + S_{22}\sigma_\theta + S_{23}\sigma_z + S_{24}\tau_{\theta z} + S_{25}\tau_{rz} + S_{26}\tau_{r\theta} \\
 \varepsilon_z &= S_{13}\sigma_r + S_{23}\sigma_\theta + S_{33}\sigma_z + S_{34}\tau_{\theta z} + S_{35}\tau_{rz} + S_{36}\tau_{r\theta} \\
 \gamma_{\theta z} &= S_{14}\sigma_r + S_{24}\sigma_\theta + S_{34}\sigma_z + S_{44}\tau_{\theta z} + S_{45}\tau_{rz} + S_{46}\tau_{r\theta} \\
 \gamma_{rz} &= S_{15}\sigma_r + S_{25}\sigma_\theta + S_{35}\sigma_z + S_{45}\tau_{\theta z} + S_{55}\tau_{rz} + S_{56}\tau_{r\theta} \\
 \gamma_{r\theta} &= S_{16}\sigma_r + S_{26}\sigma_\theta + S_{36}\sigma_z + S_{46}\tau_{\theta z} + S_{56}\tau_{rz} + S_{66}\tau_{r\theta}
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

Todas as direções paralelas a g e passando por diferentes pontos são equivalentes, conforme está representado na Figura 3.15; todas as direções radiais que interceptam g em

ângulos retos, são também equivalentes; e todas as direções ortogonais às duas primeiras são equivalentes se elas forem confinadas a 3 (três) pares de superfícies:

- Dois planos normais a g , dois planos passando por g e duas superfícies cilíndricas com eixo g em comum.

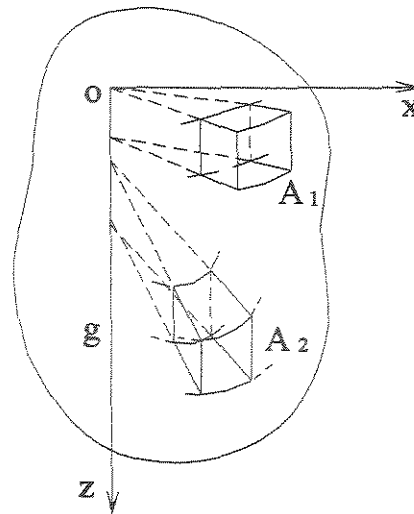


FIGURA 3.15 – Direções paralelas e equivalentes.

Fonte: MASCIA (1991).

Se o sólido não é homogêneo, os coeficientes S_{ijkl} das relações (3.93), são funções das coordenadas cilíndricas.

3.7 Sobre o Princípio de Saint-Venant

Na teoria da elasticidade, a solução exata de alguns problemas apresenta comumente dificuldades matemáticas devido à forma, às vezes complicadas, das condições de contorno. Frequentemente é possível obter uma solução bastante satisfatória do problema se as condições de contorno são um tanto modificadas. Em 1855, B. de Saint-Venant, propôs um princípio com o intuito de simplificar a resolução de tais problemas. Este princípio pode ser apresentado como segue (SOKOLNIKOFF, 1987):

“Se algum sistema de forças agindo sobre uma parte da superfície de um corpo é substituído por um diferente sistema de forças agindo sobre a mesma parte do corpo, então os efeitos dos dois diferentes sistemas sobre as partes do corpo suficientemente afastadas da região da aplicação das forças são essencialmente os mesmos, contanto que os dois sistemas de forças sejam estaticamente equivalentes.”

A frase “estaticamente equivalentes” significa que os dois sistemas de forças tem a mesma força resultante e o mesmo momento resultante. Ou seja, uma mudança na distribuição do carregamento nas extremidades, sem alterar o valor da resultante, modifica as tensões de modo significativo apenas nas proximidades da aplicação da força, sem produzir efeitos apreciáveis sobre o estado de tensões das regiões afastadas do ponto de aplicação.

Na Figura 3.17 está apresentado um diagrama de tensões normais de uma viga bi-engastada (Figura 3.16), constituída de um material isotrópico e sujeita a uma carga concentrada no meio do vão, simulada no programa ADINA³. É possível observar o comportamento das tensões nas proximidades do ponto de aplicação da carga, onde ocorre um salto no diagrama, e como que elas se distribuem nas regiões afastadas dessa singularidade.

³ ADINA é um programa de análise, linear e não linear, em elementos finitos que tem a capacidade de resolver uma variedade de problemas estruturais, térmicos e de escoamento de fluídos.

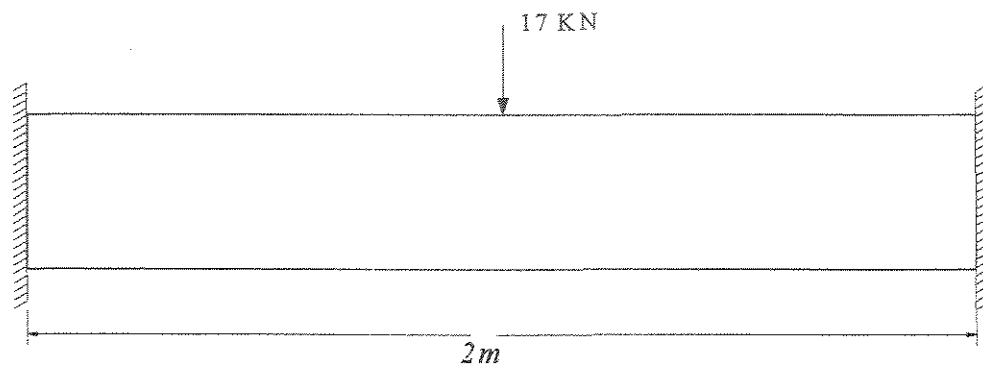


FIGURA 3.16 – Viga bi-engastada sujeita a uma carga concentrada.

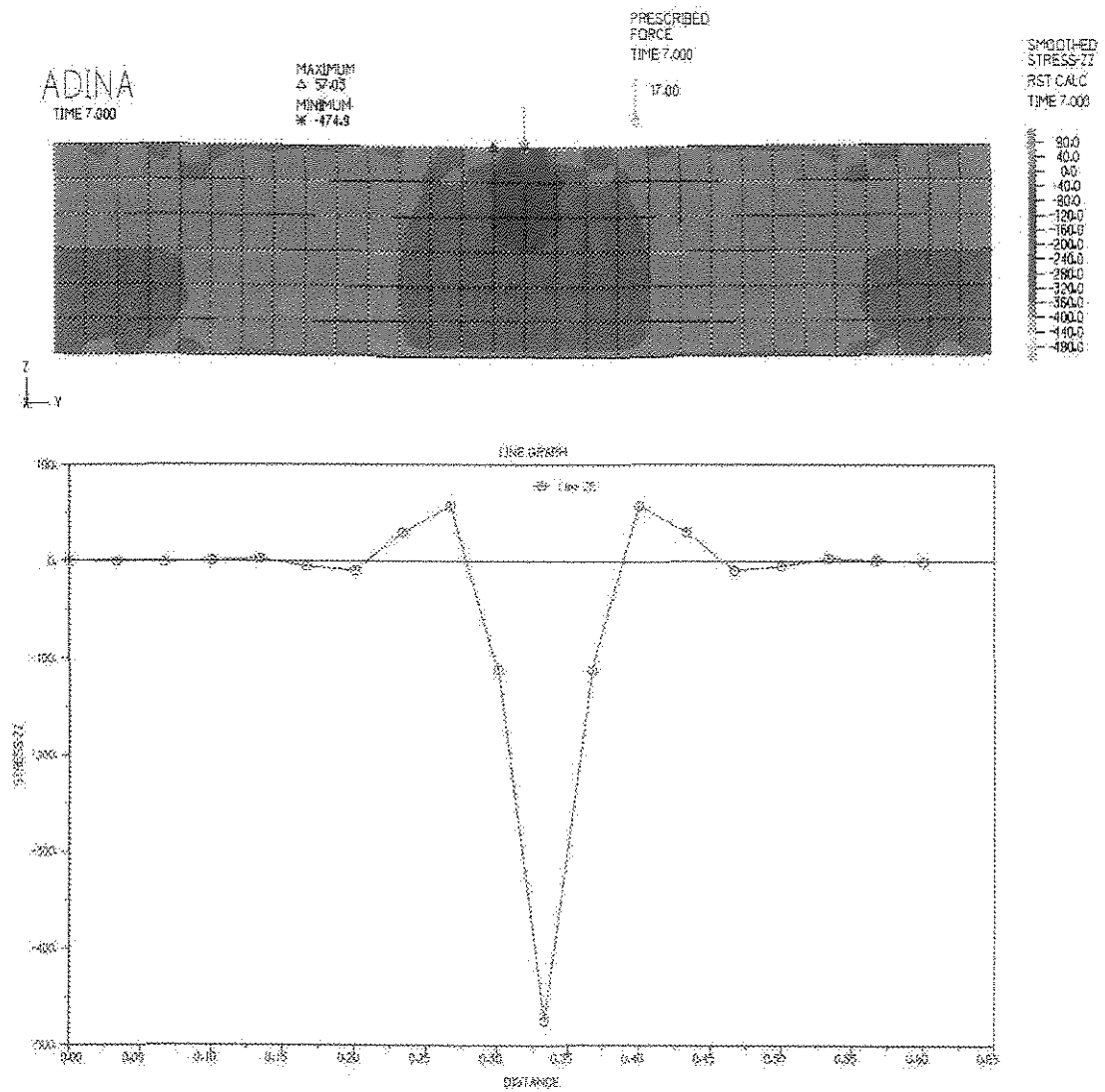


FIGURA 3.17 – Diagrama de tensões normais na direção do eixo Z.

Com o aumento do uso de materiais compósitos, a aplicação do princípio de Saint-Venant na elasticidade anisotrópica tem sido investigada por muitos autores. De acordo com CHOI & HORGAN (1977), a aplicação do princípio de Saint-Venant é justificável na análise de sólidos isotrópicos. Para sólidos anisotrópicos ela não é justificável no geral, pois a anisotropia pode estender a influência dos efeitos de extremidade nesses sólidos, e assim, eles não podem ser negligenciados.

MILLER & HORGAN (1995), estudando tensões e deformações em faixas ortotrópicas e anisotrópicas submetidas a cargas na extremidade, também destacam que os efeitos das tensões localizadas sobre os sólidos anisotrópicos são maiores do que para os sólidos ortotrópicos, dando uma ênfase particular sobre a influência das constantes elásticas do material sobre o padrão de decréscimo de tensões.

STRONGE & KASHTALYAN (1997), estudando a aplicação do princípio de Saint-Venant em estruturas feitas de compósitos fibrosos unidirecionais, destacam que para um sólido anisotrópico, há um pequeno decréscimo da energia de deformação na direção onde o módulo de elasticidade é maior.

Porém, não invalidando os estudos desses pesquisadores, mas buscando-se uma simplificação nas tarefas analíticas que são necessárias ao desenvolvimento deste trabalho, o princípio de Saint-Venant é utilizado como uma ferramenta muito proveitosa. A seguir, será apresentada outra ferramenta importante na análise de distribuição de tensões e de deformações, denominada de função de tensão de Airy.

3.8 A Função de Tensão de Airy (ϕ)

Quando se tem um problema plano na teoria da elasticidade, as equações de equilíbrio, com as forças de volume ausentes, podem ser escritas como (TING, 1996):

$$\sigma_{i1,i} + \sigma_{i2,i} = 0 \quad (i = 1,2) \quad (3.94)$$

ou em notação diferencial:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3.95a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (3.95b)$$

A solução geral dessas equações de equilíbrio contém uma função arbitrária $\phi(x,y)$ que tem uma simples forma (FILONENKO - BORODICH, 1963):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (3.96)$$

Substituindo-se essas expressões de tensão nas equações (3.95) observa-se que elas serão satisfeitas identicamente, qualquer que seja a função ϕ , desde que suas derivadas parciais existam e sejam contínuas até a 4ª ordem. Esta função ϕ é chamada de função de tensão de Airy⁴.

A solução geral (3.96) pode facilmente ser obtida como segue:

A equação (3.95a) é satisfeita assumindo-se que:

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.97)$$

onde $\psi(x,y)$ é uma função de tensão arbitrária. A equação (3.95b) será satisfeita se:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad \text{e} \quad \sigma_y = -\frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (3.98)$$

onde $\chi(x,y)$ é também uma função de tensão arbitrária.

⁴ G. B. Airy. Brit. Assoc. for the Advancement of Science. Rept. 1862. (TIMOSHENKO & GOODIER, 1970).

Entretanto, ambas as equações (3.95) serão satisfeitas simultaneamente somente se as expressões de τ_{xy} em (3.97) e (3.98) coincidirem. Assim, tem-se:

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\chi}{\partial y} \quad (3.99)$$

ou,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y} = 0 \quad (3.100)$$

A equação (3.95) será satisfeita se assumir-se:

$$\psi = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \text{e} \quad \chi = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (3.101)$$

Introduzindo-se os valores das funções de tensão ψ e χ nas equações (3.97) e (3.98) obtém-se as equações (3.96) que são a solução geral das equações de equilíbrio.

A função de tensão de Airy (ϕ) se mostra muito importante, não só na solução de muitos problemas da engenharia estrutural, mas também em outras áreas. Por exemplo, YIANNPOULOS et al. (1997) estudando os efeitos das pressões internas na resistência à fadiga de eixos de transmissão, utiliza a função de tensão de Airy (ϕ) para calcular as tensões térmicas que surgem nesses eixos. Na investigação dos mecanismos de ruptura em fios de transmissão, LUO (1999) usa um modelo plano para descrever a distribuição de tensões e as soluções são dadas pela função de tensão de Airy (ϕ)

Neste trabalho, nos capítulos que se seguem, a função de tensão de Airy (ϕ) será utilizada na análise de sólidos anisotrópicos, sendo importante na solução dos problemas de distribuição de tensões e de deformações.

4 PROBLEMAS PLANOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE DE SÓLIDOS ANISOTRÓPICOS

Neste capítulo, considerando-se os estados planos de tensão e de deformação, será apresentada uma revisão bibliográfica referente a alguns problemas da teoria da elasticidade de sólidos anisotrópicos. O uso das funções de tensão para a solução destes problemas, bem como para problemas envolvendo sólidos possuindo outros tipos de simetria elástica, também será abordado.

4.1 Estado Plano de Tensão de uma Chapa Homogênea

O estado de tensão em todos os pontos de um sólido elástico é conhecido se as componentes de tensão são conhecidas em três planos perpendiculares entre si e normais às direções coordenadas. O estado de deformação é determinado pelas componentes de deformação, as quais dependem dos três deslocamentos nas direções coordenadas.

Consequentemente, para se ter a determinação completa dos estados de tensão e de deformação de um sólido elástico, o qual está submetido a forças externas, é necessário determinar nove parâmetros: seis componentes de tensão σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) e três componentes de deslocamentos u_i ($i = 1, 2, 3$). Para determiná-las são necessárias nove equações independentes, que são as três equações de equilíbrio e as seis equações expressando a lei de Hooke generalizada.

Neste contexto, modelando um problema na elasticidade plana, LEKHNITSKII et al. (1968) consideram uma chapa elástica anisotrópica homogênea de espessura uniforme, em equilíbrio como resultado das forças distribuídas sobre seus lados e as forças de volume, conforme Figura 4.1. Supondo-se que:

- Em cada ponto da chapa passa um plano de simetria elástica paralelo ao seu plano médio;
- As forças aplicadas nos lados e as forças de volume estão agindo entre os planos, os quais são paralelos ao plano médio e elas estão distribuídas simetricamente em relação a este plano e variando suavemente em relação à espessura da chapa;
- As deformações da chapa são consideradas pequenas.

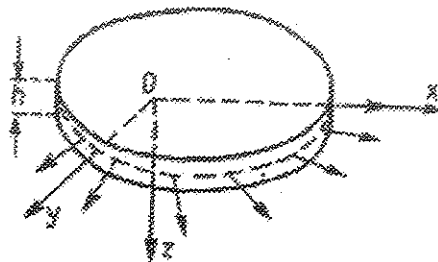


FIGURA 4.1 – Chapa submetida a um estado plano de tensão.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

Um estado de tensão na chapa que satisfaça as condições acima, segundo LEKHNITSKII et al. (1968), é chamado de estado plano de tensões generalizado. O plano médio não flete durante a deformação e permanece indeformado.

Desconsiderando-se a ação das forças de volume, as equações de equilíbrio podem ser escritas, em notação indicial:

$$\sigma_{ii,1} + \sigma_{i2,2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (4.1)$$

No estado plano de tensão, tem-se a seguinte lei constitutiva:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (4.2)$$

onde ε_{ij} são as deformações, σ_{kl} as tensões e S_{ijkl} o tensor de compliância, com os índices subscritos assumindo os valores 1 e 2. Utilizando-se da notação reduzida apresentada por TING (1996), pode-se escrever a lei constitutiva (4.2) numa forma mais simplificada:

$$\varepsilon_m = S_{mn} \sigma_n \quad (m, n = 1, 2, 6) \quad (4.3)$$

As equações de equilíbrio são satisfeitas pela introdução de uma função de tensão ϕ e assumindo-se que:

$$\sigma_{11} = \phi_{,22} ; \quad \sigma_{22} = \phi_{,11} ; \quad \sigma_{12} = -\phi_{,12} \quad (4.4)$$

Substituindo-se as equações (4.4) nas equações constitutivas (4.3) e esse resultado na equação de compatibilidade (4.5):

$$\varepsilon_{1,22} + \varepsilon_{2,11} - \varepsilon_{6,12} = 0 \quad (4.5)$$

obtem-se a equação diferencial:

$$S_{22}\phi_{,1111} - 2S_{26}\phi_{,1112} + (2S_{12} + S_{66})\phi_{,1122} - 2S_{16}\phi_{,1222} + S_{11}\phi_{,2222} = 0 \quad (4.6)$$

Essa mesma equação diferencial foi também obtida por JAYNE & HUNT (1969), na modelagem de problemas planos envolvendo sólidos anisotrópicos.

Em particular, para uma chapa ortotrópica, obtém-se:

$$S_{22}\phi_{,1111} + (2S_{12} + S_{66})\phi_{,1122} + S_{11}\phi_{,2222} = 0 \quad (4.7)$$

Colocando-se as constantes de engenharia, têm-se:

$$\frac{1}{E_2}\phi_{,1111} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{21}}{E_1} \right)\phi_{,1122} + \frac{1}{E_1}\phi_{,2222} = 0 \quad (4.8)$$

E por fim, para uma chapa isotrópica, $E_1=E_2=E$; $G_{12} = \frac{E}{2(1+\nu_{21})}$ e a equação torna-se:

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,2222} = 0 \quad (4.9)$$

4.2 Estado Plano de Deformação num Sólido Homogêneo

O problema de estado plano de deformação tem muito em comum com o problema de equilíbrio elástico de uma chapa submetida a tensões planas generalizadas. De acordo com LEKHNITSKII et al. (1968), considerando-se um sólido anisotrópico homogêneo na forma de um cilindro de seção transversal arbitrária, onde a dimensão do sólido na direção z é maior, e que está em equilíbrio com as forças distribuídas sobre a superfície lateral e com as forças de volume, conforme Figura 4.2, supõe-se que:

- cada ponto do sólido possui um plano de simetria elástica normal a sua geratriz;
- as forças estão agindo em planos normais à geratriz e são constantes ao longo dela;
- as deformações são consideradas pequenas.

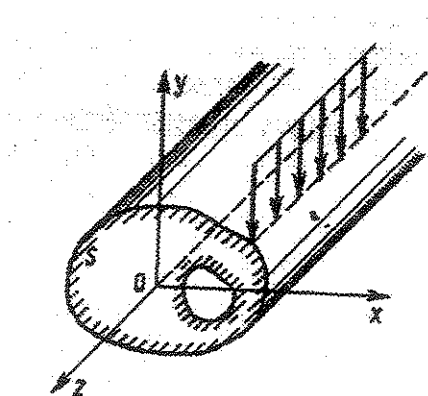


FIGURA 4.2 – Sólido anisotrópico submetido a um estado plano de deformação.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

As seções transversais extremas são confinadas entre planos rígidos sem atrito, de tal forma que o deslocamento na direção axial é impedido. Desde que não exista deslocamento axial nas extremidades, e por simetria, na seção do meio, pode-se admitir também que não ocorrem deslocamentos em todas as seções transversais. Sobre um sólido sujeito a estas condições, diz-se que está submetido a um estado plano de deformações (JAYNE & HUNT, 1969).

Utilizando-se um sistema cartesiano de coordenadas, em notação diferencial, e assumindo-se para os deslocamentos:

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y), \quad w = 0 \quad (4.10)$$

obtem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (4.12)$$

Desconsiderando-se a ação das forças peso, as equações de equilíbrio podem ser escritas:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (4.14)$$

E as equações constitutivas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \beta_{11} \sigma_x + \beta_{12} \sigma_y + \beta_{16} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \beta_{12} \sigma_x + \beta_{22} \sigma_y + \beta_{26} \tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= \beta_{16} \sigma_x + \beta_{26} \sigma_y + \beta_{66} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (4.15)$$

e também:

$$\sigma_z = -\frac{1}{S_{33}} (S_{13} \sigma_x + S_{23} \sigma_y + S_{36} \tau_{xy}) \quad (4.16)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad (4.17)$$

onde β_{ij} são constantes, as quais podem ser chamadas de coeficientes reduzidos de deformação (LEKHNITSKII, 1981). Eles são relacionados com S_{ij} pela seguinte fórmula:

$$\beta_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3} S_{j3}}{S_{33}} \quad (i,j = 1,2,6) \quad (4.18)$$

com as tensões:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (4.19)$$

e utilizando-se ainda a equação de compatibilidade (4.5), obtém-se:

$$\beta_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (4.20)$$

em notação indicial:

$$\beta_{22} \phi_{,1111} - 2\beta_{26} \phi_{,1112} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \phi_{,1122} - 2\beta_{16} \phi_{,1222} + \beta_{11} \phi_{,2222} = 0 \quad (4.21)$$

As fórmulas e equações apresentadas não consideram as condições de extremidade do cilindro. Estritamente falando, elas são verdadeiras para um cilindro infinito. No caso de um cilindro com uma extremidade livre, com o uso do princípio de Saint-Venant, como já comentado, é possível desprezar a influência dessa extremidade livre na distribuição de tensões.

Devido a quase completa identidade das equações básicas e das condições de contorno para os estados planos de tensões e de deformações (a diferença está somente nos coeficientes presentes nas equações constitutivas), ambos problemas são resolvidos por métodos idênticos. A solução para um problema plano de tensões pode ser completamente aplicada ao correspondente caso plano de deformações.

Assim, LEKHNITSKII et al. (1968) mostram que um problema plano da teoria da elasticidade, considerando sólidos anisotrópicos, é reduzido a determinação de uma função de tensão ϕ , a qual satisfaz a equação diferencial (4.6) e as condições de contorno de cada problema em estudo.

4.3 Cálculo dos Deslocamentos de um Cilindro Anisotrópico

Baseando-se no trabalho de LEKHNITSKII (1981), e considerando-se a anisotropia cilíndrica, analisa-se neste item a conceituação teórica a respeito do cálculo dos deslocamentos de um cilindro anisotrópico com carga axial constante aplicada em suas extremidades, conforme Figura 4.3. A tensão e a deformação na direção axial são consideradas constantes.

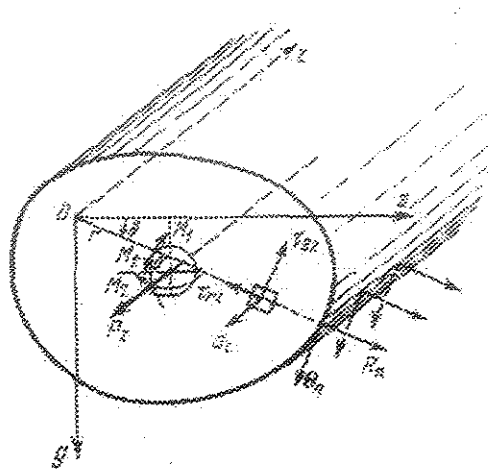


FIGURA 4.3 –Cilindro anisotrópico submetido a uma carga axial.

Fonte: LEKHNITSKII (1981).

Sejam então, \mathbf{R} e Θ as forças de volume e $U^*(x, y)$ o potencial associado por:

$$\mathbf{R} = -\frac{\partial U^*}{\partial r}; \Theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \quad (4.22)$$

Para se ter as distribuições de tensões e de deformações, é necessário determinar seis componentes de tensões e três componentes de deslocamentos satisfazendo as equações de equilíbrio e as condições de contorno. As equações de equilíbrio, considerando-se o eixo z como eixo de anisotropia, podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\sigma_r - U^*)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma_\theta - U^*)}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

e as relações constitutivas :

$$\begin{cases}
\varepsilon_r = S_{11}\sigma_r + S_{12}\sigma_\theta + S_{13}\sigma_z + S_{14}\tau_{\theta z} + S_{15}\tau_{rz} + S_{16}\tau_{r\theta} \\
\varepsilon_\theta = S_{12}\sigma_r + S_{22}\sigma_\theta + S_{23}\sigma_z + S_{24}\tau_{\theta z} + S_{25}\tau_{rz} + S_{26}\tau_{r\theta} \\
\varepsilon_z = S_{13}\sigma_r + S_{23}\sigma_\theta + S_{33}\sigma_z + S_{34}\tau_{\theta z} + S_{35}\tau_{rz} + S_{36}\tau_{r\theta} \\
\gamma_{\theta z} = S_{14}\sigma_r + S_{24}\sigma_\theta + S_{34}\sigma_z + S_{44}\tau_{\theta z} + S_{45}\tau_{rz} + S_{46}\tau_{r\theta} \\
\gamma_{rz} = S_{15}\sigma_r + S_{25}\sigma_\theta + S_{35}\sigma_z + S_{45}\tau_{\theta z} + S_{55}\tau_{rz} + S_{56}\tau_{r\theta} \\
\gamma_{r\theta} = S_{16}\sigma_r + S_{26}\sigma_\theta + S_{36}\sigma_z + S_{46}\tau_{\theta z} + S_{56}\tau_{rz} + S_{66}\tau_{r\theta}
\end{cases} \tag{4.24}$$

Fazendo-se a deformação normal em z (ε_z) igual a **D** e em seguida isolando-se a tensão normal neste direção tem-se:

$$\sigma_z = \frac{D}{S_{33}} - \frac{1}{S_{33}} (S_{13}\sigma_r + S_{23}\sigma_\theta + \dots + S_{36}\tau_{r\theta}) \tag{4.25}$$

Introduzindo-se os coeficientes de deformação reduzidos:

$$\beta_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}S_{j3}}{S_{33}} \quad (i,j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{4.26}$$

Observa-se que este tensor é simétrico e que $\beta_{i3} = \beta_{3i} = 0$, para $i = 1$ a 6.

Colocando-se, agora, os deslocamentos como função das deformações, pode-se escrever:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \beta_{11}\sigma_r + \beta_{12}\sigma_\theta + \dots + \beta_{16}\tau_{r\theta} + \frac{S_{13}}{S_{33}} D \tag{4.27a}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \beta_{12}\sigma_r + \beta_{22}\sigma_\theta + \dots + \beta_{26}\tau_{r\theta} + \frac{S_{23}}{S_{33}} D \tag{4.27b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = D \quad (4.27c)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \beta_{14} \sigma_r + \beta_{24} \sigma_\theta + \dots + \beta_{46} \tau_{r\theta} + \frac{S_{34}}{S_{33}} D \quad (4.27d)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = \beta_{15} \sigma_r + \beta_{25} \sigma_\theta + \dots + \beta_{56} \tau_{r\theta} + \frac{S_{35}}{S_{33}} D \quad (4.27e)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \beta_{16} \sigma_r + \beta_{62} \sigma_\theta + \dots + \beta_{66} \tau_{r\theta} + \frac{S_{36}}{S_{33}} D \quad (4.27f)$$

Através da integração da terceira, quarta e quinta equações pode-se obter os deslocamentos, contendo três novas funções, $u(r, \theta)$, $v(r, \theta)$, $w(r, \theta)$.

Além disto, para satisfazer a primeira, a segunda e a sexta equação, D será função linear de:

$$D = Ar \cos \theta + Br \sin \theta + C \quad (4.28)$$

onde as constantes A , B e C são determinadas através das condições de contorno.

Depois de algumas manipulações matemáticas, LEKHNITSKII (1981) apresenta um sistema de 3 (três) equações para u e v (correspondente a primeira, segunda e sexta equações de (4.27))

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^0 &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \\ \gamma_{r\theta}^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{aligned} \quad (4.29)$$

e um sistema de 2 (duas) equações para w (corresponde à quarta e quinta equações de (4.27)):

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\end{aligned}\quad (4.30)$$

Pela eliminação das funções u , v , w destes sistemas, pode-se ficar com um sistema de duas equações, somente em função das tensões. Para eliminar u e v do primeiro sistema, utiliza-se a identidade:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r}\right) \epsilon_r^0 + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \epsilon_\theta^0) - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r \gamma_{r\theta}^0) = 0 \quad (4.31)$$

Quando as funções u , v , w são determinadas, os deslocamentos podem ser obtidos por:

$$\begin{aligned}u_r &= -\frac{z^2}{2} (A \cos \theta + B \sin \theta) + u + u'_r \\ u_\theta &= -\frac{z^2}{2} (-A \sin \theta + B \cos \theta) + v + 3rz + u'_\theta \\ w &= z(Ar \cos \theta + Br \sin \theta + C) + w + w'\end{aligned}\quad (4.32)$$

Nestas equações estão incluídos os deslocamentos de corpo rígido escritos por:

$$\begin{aligned}u'_r &= z(\omega_2 \cos \theta - \omega_1 \sin \theta) + u_\theta \cos \theta + v_\theta \sin \theta; \\ u'_\theta &= -z(\omega_2 \sin \theta + \omega_1 \cos \theta) + \omega_3 r - u_\theta \sin \theta + v_\theta \cos \theta; \\ w' &= -r(\omega_2 \cos \theta - \omega_1 \sin \theta) + w_0\end{aligned}\quad (4.33)$$

Segundo LEKHNITSKII (1981), além da carga axial constante, a aplicação de momentos fletores e torsores em estruturas cilíndricas é também possível. CHEN et al. (2000) estudaram o mesmo cilindro anisotrópico, porém, submetendo-o a vários carregamentos, inclusive à variação de temperatura.

A seguir, é apresentada a aplicação da função de tensão em alguns trabalhos realizados sobre distribuição de tensões e de deformações em elementos estruturais possuindo diferentes tipos de simetria elástica.

4.4 A Aplicação da Função de Tensão na Solução de Alguns Problemas Planos

Na aplicação do modelo anisotrópico cilíndrico na madeira, CARRIER & ITHACA (1943) apresentam uma análise sobre placas finas de um material possuindo anisotropia cilíndrica. São feitas algumas aplicações considerando-se o estado plano de tensões. Utilizando-se as equações de equilíbrio, as relações deformação-deslocamento e a lei de Hooke, em coordenadas cilíndricas, pode-se chegar a função de tensão de Airy (ϕ) para este caso, a qual satisfaz as equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]\end{aligned}\tag{4.34}$$

Com o emprego de uma função de tensão em termos de r e θ , são construídos diagramas de tensões e de deformações para placas carregadas na direção radial.

Outra aplicação da função de tensão de Airy (ϕ) é feita por FOSCHI (1970) no estudo de estruturas curvas de madeira. Segundo a mesma base teórica de CARRIER & ITHACA (1943), FOSCHI (1970) fez uma análise numérica, via elementos finitos, destas estruturas, com anisotropia cilíndrica.

Com base nestes trabalhos, NOACK & ROTH (1976) apresentam uma interessante análise matemática da teoria da elasticidade de materiais ortotrópicos, considerando-se a anisotropia romboédrica (retilinear) e a cilíndrica. Em seguida são feitas algumas aplicações da teoria para estruturas curvas em madeira laminada.

GREEN & ZERNA (1954) apresentam um estudo sobre a distribuição de tensões numa peça tracionada com um orifício interno. Estas distribuições são comparadas com um material isotrópico e pode-se observar os diferentes comportamentos mecânicos quando as tensões são aplicadas longitudinalmente e quando são aplicadas normalmente à direção longitudinal.

Considerando-se o problema das tensões internas que surgem devido a retração durante a secagem da madeira, HSU & TANG (1974), fizeram um interessante estudo analisando uma peça de madeira em forma de tronco sem forças externas.

A retração (α_i) devido a variação de umidade foi calculada por HSU & TANG (1974) como parcelas das relações tensão-deformação, em coordenadas cilíndricas, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= S_{rr}\sigma_r + S_{r\theta}\sigma_\theta + S_{rz}\sigma_z - \alpha_r; \\ \varepsilon_\theta &= S_{r\theta}\sigma_r + S_{\theta\theta}\sigma_\theta + S_{\theta z}\sigma_z - \alpha_\theta; \\ \varepsilon_z &= S_{rz}\sigma_r + S_{\theta z}\sigma_\theta + S_{zz}\sigma_z - \alpha_z;\end{aligned}\tag{4.35}$$

onde α_r , α_θ , e α_z são retrações nas direções dos eixos r , θ e z , respectivamente

Devido à simetria radial, aximetria, o campo de deslocamentos é função de r e o deslocamento na direção θ é nulo. Assim as deformações valem:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = c\tag{4.36}$$

onde c é assumido como uma constante.

Desde que a deformação em z seja constante as deformações são reescritas, através dos coeficientes reduzidos de deformação (β), por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \beta_{rr}\sigma_r + \beta_{r\theta}\sigma_\theta + \beta_r; \\ \varepsilon_\theta &= \beta_{r\theta}\sigma_r + \beta_{\theta\theta}\sigma_\theta + \beta_\theta\end{aligned}\tag{4.37}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\beta_{rr} &= S_{rr} - \frac{S_{rz}S_{rz}}{S_{zz}}; \\
\beta_{r\theta} &= S_{r\theta} - \frac{S_{rz}S_{\theta z}}{S_{zz}}; \\
\beta_{\theta\theta} &= S_{\theta\theta} - \frac{S_{\theta z}S_{\theta z}}{S_{zz}}; \\
\beta_r &= \frac{S_{rz}}{S_{zz}}(c + \alpha_z) - \alpha_r; \\
\beta_\theta &= \frac{S_{\theta z}}{S_{zz}}(c + \alpha_z) - \alpha_\theta
\end{aligned} \tag{4.38}$$

A equação de equilíbrio requer que:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{4.39}$$

Com isto o problema a ser resolvido é determinar a solução desta equação conjuntamente com as equações constitutivas, considerando-se também a equação de compatibilidade das deformações. Assume-se, então, uma função $\phi(r)$, diferenciável em r , tal que:

$$\sigma_r = \frac{\phi'}{r}; \quad \sigma_\theta = \phi'' \tag{4.40}$$

Verifica-se, claramente, que estas tensões satisfazem as equações de equilíbrio. As equações constitutivas tornam-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \beta_{rr} \frac{\phi'}{r} + \beta_{r\theta} \phi'' + \beta_r; \\
\varepsilon_\theta &= \beta_{r\theta} \frac{\phi'}{r} + \beta_{\theta\theta} \phi'' + \beta_\theta
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Substituindo-se estas deformações na equação de compatibilidade:

$$r \frac{d^2 \varepsilon_\theta}{dr^2} + 2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} - \frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0 \tag{4.42}$$

têm-se:

$$\beta_{\theta\theta} \left(\frac{d^4\phi}{dr^4} + \frac{2d^3\phi}{rdr^3} \right) + \beta_{rr} \left(-\frac{1d^2\phi}{r^2dr^2} + \frac{1d\phi}{r^3dr} \right) = 0 \quad (4.43)$$

E a forma geral da solução desta equação diferencial é a seguinte:

$$\phi = \frac{A_1}{2} r^2 + \frac{A_2}{1+k} r^{1+k} + \frac{A_3}{1-k} r^{1-k} + A_4 \quad (4.44)$$

onde: $k = \sqrt{\frac{\beta_{rr}}{\beta_{\theta\theta}}}$. As tensões são agora determinadas e valem:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A_1 + A_2 r^{k-1} + A_3 r^{-k-1}; \\ \sigma_{\theta} &= A_1 + A_2 k r^{k-1} - A_3 k r^{-k-1} \end{aligned} \quad (4.45)$$

com três constantes desconhecidas, A_1 , A_2 e A_3 . A título de ilustração, HSU & TANG (1974) apresentam alguns valores de k , para algumas espécies de madeiras norte-americanas:

TABELA 4.1- Valores de k para algumas espécies de madeira.

Espécies	Teor de Umidade		
	6%	12%	20%
Yellow-poplar	0,677	0,678	0,679
Green ash	0,761	0,761	0,760
Engelmann spruce	0,725	0,745	0,745

Fonte: HSU & TANG (1974).

Estudando as tensões e as deformações em vigas ortotrópicas submetidas a cargas normais e tangenciais, SILVERMAN (1964) desenvolveu um método de solução, pela consideração de uma faixa infinita possuindo elasticidade plana, através da utilização de funções de tensão de Airy (ϕ) polinomiais de vários graus, empregando seu método em vários exemplos.

TIMOSHENKO & GOODIER (1970), mostram que na solução de problemas bidimensionais da elasticidade isotrópica, as soluções da equação (4.9) na forma de polinômios são de grande interesse. Utilizando-se de polinômios de diversos graus e ajustando-se adequadamente seus coeficientes, várias soluções para chapas e vigas retangulares, submetidas a diversas condições de carregamento e vinculação, a partir de formas simples da função de tensão, são apresentadas.

TULLINI & SAVOIA (1999), estudando vigas ortotrópicas submetidas a qualquer distribuição contínua de cargas normais ou tangenciais, sugerem uma solução em forma de série polinomial expandida da função de Airy (ϕ).

Calculando as tensões num cilindro circular vazado, de paredes espessas, submetido a uma pressão externa distribuída uniformemente em relação ao eixo x da seção transversal do cilindro, conforme mostrado na Figura 4.4, YIANNPOULOS (1996) utilizou uma função de tensão de Airy (ϕ) expressada em coordenadas polares.

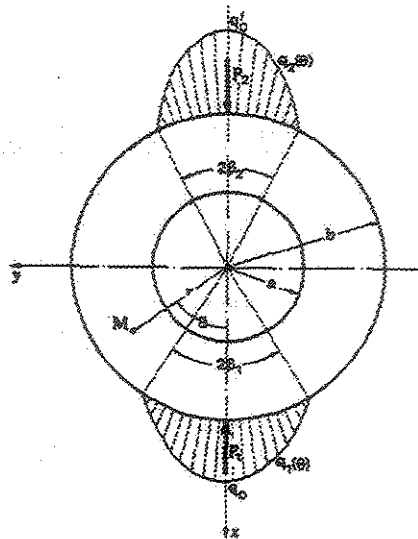


FIGURA 4.4 – Cilindro circular vazado submetido a uma pressão externa.

Fonte: YIANNPOULOS (1996).

O cilindro é considerado longo, elástico e com uma espessura constante da parede, e como a distribuição de pressão, representada por uma série de Fourier, é aplicada ao longo do comprimento do cilindro, o problema pode ser tratado como um problema plano.

De acordo com YIANNPOULOS (1996), a função de tensão de Airy (ϕ) precisa satisfazer a equação bi-harmônica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (4.46)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\text{Em } r = a, \quad \sigma_r = 0 \quad \text{e} \quad \tau_{r\theta} = 0$$

$$\text{Em } r = b, \quad \sigma_r = -q(\theta) \quad \text{e} \quad \tau_{r\theta} = 0$$

onde $q(\theta)$ é a distribuição de pressão dada pela série de Fourier:

$$q(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (4.47)$$

os coeficientes A_0 e A_n são obtidos pela função periódica:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (4.48)$$

A solução geral da equação (4.38) torna-se:

$$\begin{aligned} \phi = & a_0 \ln r + b_0 r^2 + \frac{a_1}{2} r\theta \sin \theta - \frac{c_1}{2} r\theta \cos \theta + \left(b_1 r^3 + \frac{a'_1}{r} + b'_1 r \ln r \right) \cos \theta + \\ & + \left(d'_1 r^3 + \frac{c'_1}{r} + d'_1 r \ln r \right) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n r^n + b_n r^{n+2} + a'_n r^{-n} + b'_n r^{-n+2} \right] \cos n\theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[c_n r^n + d_n r^{n+2} + c'_n r^{-n} + d'_n r^{-n+2} \right] \sin n\theta \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde $a_0, b_0, a_1, b_1, c_1, d_1, a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, a_n, b_n, c_n, d_n, a'_n, b'_n, c'_n$ e d'_n são constantes a serem determinadas. E as componentes de tensão podem ser determinadas pelas relações:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\
\sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\
\tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\
\sigma_z &= \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Segundo YIANNPOULOS (1996), uma grande variedade de problemas práticos pode ser tratada usando os resultados de seu trabalho, como por exemplo, a determinação de tensões em conduítes cilíndricos enterrados em solos compressíveis, onde o peso próprio do solo e as cargas móveis da superfície exercem pressões sobre eles. Outro exemplo interessante, é o da determinação das tensões presentes nos revestimentos de aço, que servem de anteparos, dos túneis escavados na terra.

KUMAR et al. (1995) também estudando um cilindro circular vazado de paredes espessas, utilizaram a função de tensão de Airy (ϕ) para a determinação das tensões e das deformações que surgem nesses cilindros devido a fluência. Em sua análise numérica, KUMAR et al. (1995), consideraram uma distribuição de pressão, devido a fluência, não uniforme e assimétrica em relação aos eixos da seção transversal do cilindro. Essa distribuição de pressão também é aproximada por uma série de Fourier:

$$p(\vartheta) = p_0 + p_1 \cos \vartheta + q_1 \sin \vartheta + \sum_{n=2}^{\infty} p_n \cos n\vartheta + q_n \sin n\vartheta \tag{4.51}$$

onde:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(\vartheta) d\vartheta \\
p_n &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta \\
q_n &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(\vartheta) \sin n\vartheta d\vartheta
\end{aligned} \tag{4.52}$$

A função de tensão de Airy (ϕ) usada por KUMAR et al. (1995) é a seguinte:

$$\begin{aligned}\phi = & a_0 \ln r + b_0 r^2 + b_1 r^{-1} \cos \vartheta + f_1 r^{-1} \sin \vartheta + \\ & \sum_{n=2}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-n} + c_n r^{n+2} + d_n r^{-n+2}] \cos n\vartheta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} [e_n r^n + f_n r^{-n} + g_n r^{n+2} + h_n r^{-n+2}] \sin n\vartheta\end{aligned}\quad (4.53)$$

onde $a_0, b_0, b_1, f_1, a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n$ e h_n são coeficientes indeterminados. Essa função satisfaz a equação bi-harmônica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} \right) = 0 \quad (4.54)$$

As tensões são determinadas, assim como YIANNPOULOS (1996), por:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} \\ \sigma_\vartheta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\vartheta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right)\end{aligned}\quad (4.55)$$

E as deformações no cilindro são determinadas por:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} - (\sigma_r - \nu \sigma_\vartheta) = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (4.56)$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E} - (\sigma_\vartheta - \nu \sigma_r) = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \quad (4.57)$$

Estudando a otimização das tensões em materiais compósitos fibrosos, LEISSA & VAGINS (1978) utilizam a função de tensão de Airy (ϕ) para a análise da variação do módulo de elasticidade desses materiais. O problema é formulado em coordenadas cilíndricas, considerando

um cilindro elástico ortotrópico vazado de paredes espessas sujeito a um estado plano de deformação. A equação de compatibilidade é escrita:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} - r^2 \frac{\partial \varepsilon_{\theta}}{\partial r} \right) + r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4.58)$$

e as equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{\theta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Devido a não homogeneidade do material, os coeficientes elásticos presentes nas relações constitutivas, não são constantes e estão definidos em função das coordenadas r e θ , isto é, $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \alpha_{11} \sigma_r + \alpha_{12} \sigma_{\theta} \\ \varepsilon_{\theta} &= \alpha_{12} \sigma_r + \alpha_{22} \sigma_{\theta} \\ \gamma_{r\theta} &= \alpha_{33} \tau_{r\theta} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Porém, em vista da complexidade de se trabalhar com materiais não homogêneos, LEISSA & VAGINS (1978) assumem que esses coeficientes variam de maneira uniforme através do sólido, podendo ser expressos em termos de α_{22} por um conjunto de relações lineares:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(r, \theta) &= c_{11} \alpha_{22}(r, \theta) \\ \alpha_{12}(r, \theta) &= c_{12} \alpha_{22}(r, \theta) \\ \alpha_{33}(r, \theta) &= c_{33} \alpha_{22}(r, \theta) \end{aligned} \quad (4.61)$$

A análise ainda é mais simplificada considerando-se a aximetria presente no cilindro, assim, as deformações cisalhantes no plano r - θ ($\gamma_{r\theta}$) e as derivadas em relação a θ , presentes nas

equações de equilíbrio e na equação de compatibilidade, desaparecem, sendo conveniente expressar as tensões através da função de tensão auxiliar de Airy (ψ), definida por:

$$\psi = \frac{d\phi}{dr} \quad (4.62)$$

e a equação (4.58) torna-se:

$$\frac{d}{dr}(r\epsilon_\theta) - \epsilon_r = 0 \quad (4.63)$$

com as equações de equilíbrio (4.60) sendo reescritas:

$$\sigma_r = \frac{\psi}{r}, \quad \sigma_\theta = \frac{d\psi}{dr} \quad (4.64)$$

Utilizando-se ainda as equações (4.60), (4.61), (4.62) e as simplificações das equações (4.61), a equação diferencial que modela o problema é escrita:

$$\left(\frac{d\psi}{dr} + c_{12} \frac{\psi}{r} \right) \frac{d\alpha_{22}}{dr} + \left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - c_{11} \frac{\psi}{r^2} \right) \alpha_{22} = 0 \quad (4.65)$$

Para uma distribuição de pressões internas conhecida, a função de tensão $\psi(r)$ é dada, assim, ficando desconhecidos os coeficientes elásticos do material, que podem ser determinados através de condições de contorno convenientemente definidas, visando-se o controle das tensões nesses sólidos.

Uma outra aplicação da função de tensão de Airy (ϕ), é feita por TUTUNCU (1998) na análise de tensões e de deformações em vigas curvas ortotrópicas, de seções transversais constantes, submetidas à cargas nas extremidades. O problema é formulado em coordenadas cilíndricas, e considerando-se a aximetria existente, a função de tensão auxiliar de Airy (ψ) é utilizada.

Nos próximos itens, que ainda compõem a revisão bibliográfica, apresenta-se a aplicação das funções de tensão polinomiais, feita por LEKHNITSKII et al. (1968), e também por HASHIN (1967), na solução de problemas planos envolvendo estruturas anisotrópicas.

4.4.1 Exemplos Estudados por LEKHNITSKII et al. (1968)

LEKHNITSKII et al. (1968), também utilizando funções de tensão polinomiais, estudaram as tensões e as deformações em alguns exemplos de vigas e chapas anisotrópicas, submetidas a diferentes condições de carregamentos e vinculações. Os casos analisados por LEKHNITSKII et al. (1968), têm servido de base para trabalhos de outros pesquisadores, dentro da elasticidade aplicada aos sólidos anisotrópicos, e assim, não podem deixar de serem abordados no presente trabalho.

4.4.1.1 Chapa Retangular Anisotrópica

LEKHNITSKII et al. (1968) consideraram primeiramente uma chapa retangular anisotrópica, de espessura h , a qual está submetida a um estado plano de tensões devido a forças prescritas nos seus lados. São assumidos na análise dois casos de carregamento: tração e cisalhamento. Em ambos os casos, a lei de Hooke tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y + S_{16}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= S_{12}\sigma_x + S_{22}\sigma_y + S_{26}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= S_{16}\sigma_x + S_{26}\sigma_y + S_{66}\tau_{xy}\end{aligned}\tag{4.66}$$

4.4.1.1.1 Caso 1: Tração

A chapa está submetida à tração por forças normais p distribuídas uniformemente sobre dois lados (Figura 4.5):

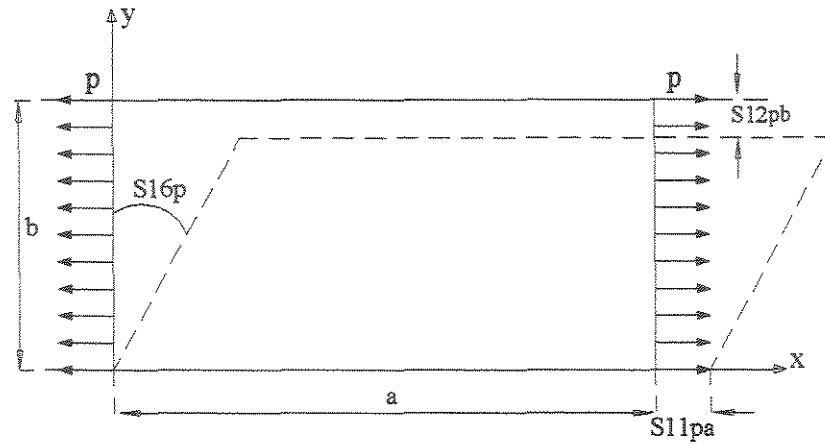


FIGURA 4.5 - Chapa retangular anisotrópica submetida à tração.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

Na chapa tem-se: $\sigma_x = p$; $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ (4.67)

A função de tensão tem a forma de um polinômio de 2º grau:

$$\phi = \frac{1}{2} p y^2$$
 (4.68)

A distribuição de tensões é idêntica ao caso de uma chapa isotrópica (ou ortotrópica) submetida à tração, e as deformações são determinadas das equações (4.66):

$$\epsilon_x = S_{11} \cdot p = \frac{p}{E_x} ; \quad \epsilon_y = S_{12} \cdot p = -\frac{\nu_{xy} p}{E_y} ; \quad \gamma_{yx} = S_{16} \cdot p = \frac{\eta_{x,xy} p}{G_{xy}}$$
 (4.69)

onde estão inseridos os termos módulo de elasticidade (E_i), coeficientes de Poisson (ν_{ij}), módulo de elasticidade transversal (G_{ij}) e coeficiente de influência mútua de segunda espécie ($\eta_{i,j}$).

Como resultado da ação das forças de tração, a chapa anisotrópica alonga-se na direção do eixo x e encurta-se na direção do eixo y. Devido a anisotropia presente na chapa, ela torna-se distorcida no plano xy (como pode ser observado na linha pontilhada da Figura 4.5). O grau de obliquidade é determinado pela constante S_{16} . Uma chapa ortotrópica, ou isotrópica, permaneceria retangular.

4.4.1.1.2 Caso 2: Cisalhamento

Forças tangenciais de intensidade t são distribuídas uniformemente sobre os lados de uma chapa retangular (Figura 4.6):

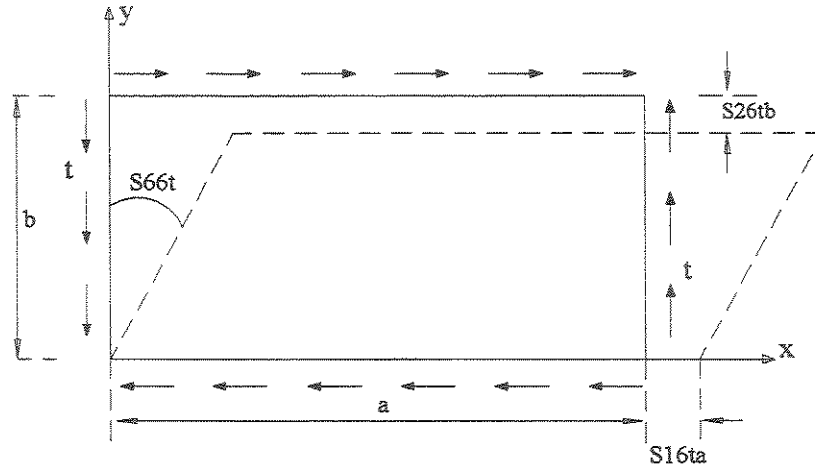


FIGURA 4.6 – Chapa retangular anisotrópica submetida à forças tangenciais.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

$$\text{Na chapa tem-se: } \sigma_x = \sigma_y = 0 ; \quad \tau_{xy} = t ; \quad (4.70)$$

A função de tensão que satisfaz as equações de equilíbrio (4.1), é a seguinte:

$$\phi = -txy \quad (4.71)$$

Das equações (4.66) obtém-se:

$$\varepsilon_x = S_{16} \cdot t = \frac{\eta_{xy,x} t}{E_x} ; \quad \varepsilon_y = S_{26} \cdot t = \frac{\eta_{xy,y} t}{E_y} ; \quad \gamma_{xy} = S_{66} \cdot t = \frac{t}{G_{xy}} \quad (4.72)$$

A chapa anisotrópica é submetida, neste caso, não somente à distorção do plano xy , a qual é determinada pela constante S_{66} , mas também à deformações normais de seus lados, dependendo dos sinais de S_{16} e S_{26} . Chapas ortotrópicas ou isotrópicas, nesta situação de tensão, apresentariam distorção sem deformações normais.

Em ambos exemplos, na situação de tração e de cisalhamento, observa-se a participação das tensões normais em deformações tangenciais e de tensões tangenciais em deformações normais. Isso se deve, segundo LEKHNITSKII (1981), à presença dos coeficientes de influência mútua de primeira espécie ($\eta_{ij,j}$) e de segunda espécie ($\eta_{i,i,j}$) nas constantes S_{16} e S_{26} , respectivamente.

4.4.1.2 Flexão Pura

Neste exemplo, LEKHNITSKII et al. (1968) analisam a deformação de uma viga anisotrópica submetida a um estado de flexão pura, causado por momentos M aplicados em suas extremidades, conforme Figura 4.7:

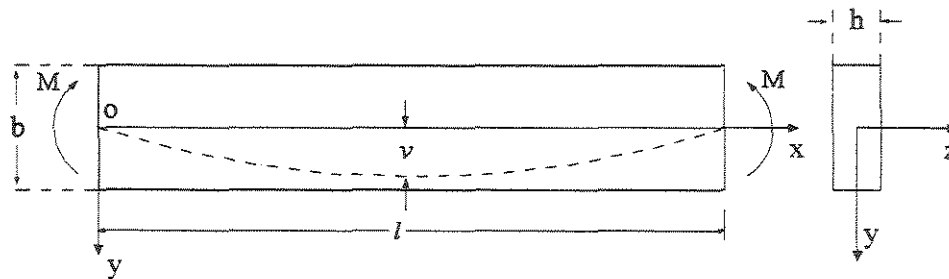


FIGURA 4.7– Viga anisotrópica submetida a um estado de flexão pura.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

A distribuição de tensões é a mesma de uma viga isotrópica (ou ortotrópica):

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y; \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0; \quad \text{onde } I = \frac{hb^3}{12} \quad (4.73)$$

A função de tensão para este caso tem a forma:

$$\phi = \frac{M}{6I} y^3 \quad (4.74)$$

LEKHNITSKII et al. (1968) definem os deslocamentos de pontos na viga, através da integração das equações constitutivas (4.70), como:

$$u = \frac{M}{I} \left(S_{11}xy + \frac{1}{2} S_{16}y^2 \right) - \omega y + u_0 = \frac{M}{I} \left(\frac{1}{E_x}xy + \frac{1}{2} \frac{\eta_{xy,x}}{E_x}y^2 \right) - \omega y + u_0 \quad (4.75)$$

$$v = \frac{M}{2I} (S_{12}y^2 - S_{11}x^2) + \omega x + v_0 = \frac{M}{2I} \left(-\frac{\nu_{xy}}{E_x}y^2 - \frac{1}{E_x}x^2 \right) + \omega x + v_0 \quad (4.76)$$

onde ω , v_0 , u_0 são constantes expressando deslocamentos de corpo rígido no plano médio da viga. A expressão (4.75) mostra que as seções transversais de uma viga anisotrópica não permanecem planas durante a deformação, diferindo assim das seções transversais de vigas ortotrópicas ou isotrópicas. O empenamento da seção transversal depende da constante S_{16} .

A equação da linha elástica da viga, que tem a mesma forma da equação de uma viga isotrópica, é a seguinte:

$$v = \frac{MS_{11}}{2I} (lx - x^2) \quad (4.77)$$

4.4.1.3 Flexão de uma Viga Engastada

Uma viga engastada com seção transversal retangular é fletida por uma força transversal P aplicada na extremidade livre (Figura 4.8):

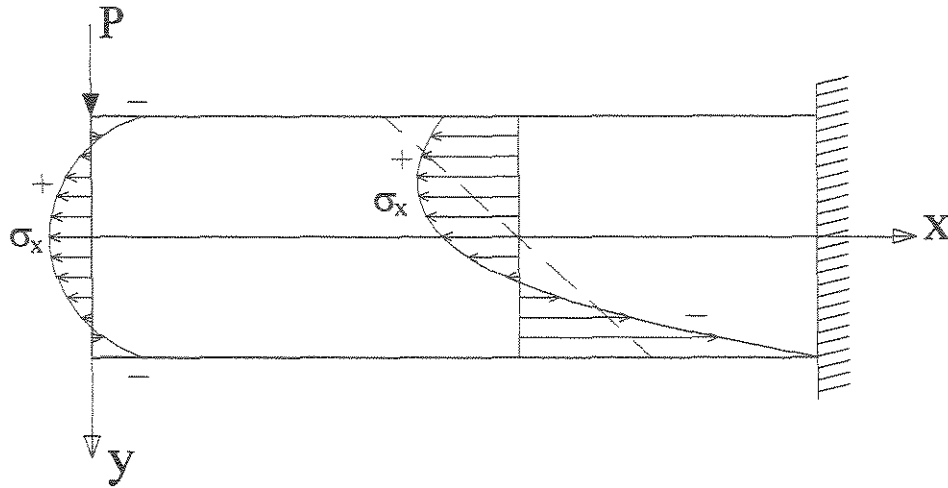


FIGURA 4.8– Viga engastada e a distribuição de tensões σ_x em sua seção transversal.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

A solução para este caso é obtida usando-se uma função de tensão na forma de um polinômio de 4ª ordem:

$$\phi = \frac{P}{I} \left[-\frac{xy^3}{6} + \frac{b^2 xy}{8} + \frac{S_{16}}{24S_{11}} (b^2 y^2 - 2y^4) \right] = \frac{P}{I} \left[-\frac{xy^3}{6} + \frac{b^2 xy}{8} + \frac{\eta_{xy,x}}{24} (b^2 y^2 - 2y^4) \right] \quad (4.78)$$

As componentes de tensão são determinadas através das equações (4.4):

$$\sigma_x = -\frac{P}{I} xy + \frac{P}{I} \cdot \eta_{xy,x} \left(\frac{b^2}{12} - y^2 \right); \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I} \cdot \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \quad (4.79)$$

Nota-se, na Figura 4.8, que as tensões σ_x não são distribuídas linearmente na seção transversal, pois o coeficiente S_{16} não é nulo devido a anisotropia, mas de acordo com uma lei parabólica. A linha pontilhada representa a distribuição de tensões de uma viga isotrópica ou ortotrópica.

A lei parabólica para a distribuição de tensões normais na seção transversal não influencia a equação da linha elástica, a qual é a mesma de uma viga ortotrópica (ou isotrópica):

$$v = \frac{P}{6EI} (x^3 - 3l^2x + 2l^3) \quad (4.80)$$

A maior tensão normal é obtida nos pontos $y = \frac{b}{2}$ e $y = -\frac{b}{2}$ da seção $x = l$. Para valores de $S_{16} = \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} > 0$ ela é igual a:

$$\sigma_{\max} = \frac{6Pl}{hb^2} \left(1 + \eta_{xy,x} \cdot \frac{b}{3l} \right) \quad (\text{tensão de tração}) \quad (4.81)$$

e para $S_{16} = \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} < 0$:

$$\sigma_{\max} = \frac{6Pl}{hb^2} \left(1 - \eta_{xy,x} \cdot \frac{b}{3l} \right) \quad (\text{tensão de compressão}) \quad (4.82)$$

4.4.1.4 Flexão de Vigas Anisotrópicas com Cargas Uniformemente Distribuídas

Segundo LEKHNITSKII et al. (1968), a distribuição de tensões em vigas anisotrópicas submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos ao longo do seu comprimento é obtida usando-se uma função de tensão tomada na forma de um polinômio de 5ª ordem. As constantes arbitrárias desse polinômio podem ser escolhidas de maneira que as tensões, ao longo dos lados da viga, satisfaçam as condições de contorno. LEKHNITSKII et al. (1968) fornecem soluções para dois casos de vinculações:

4.4.1.4.1 Caso 1: Viga Engastada

Para uma viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído q , conforme Figura 4.9, LEKHNITSKII et al. (1968) fornecem as seguintes fórmulas, obtidas a partir da função de Airy, para as componentes de tensão:

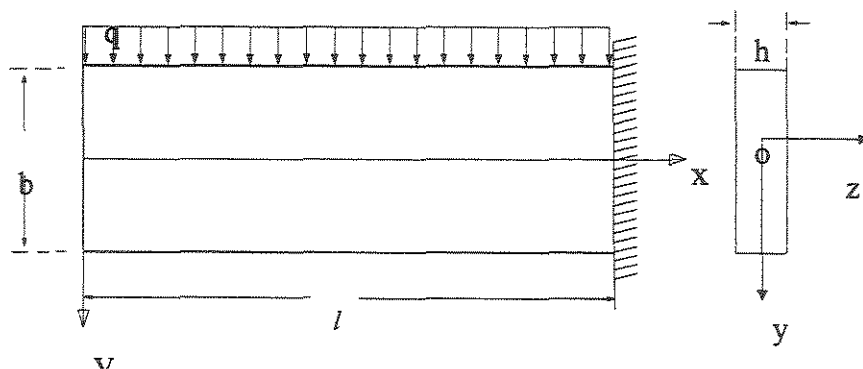


FIGURA 4.9– Viga engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

$$\sigma_x = -\frac{qx^2y}{2I} + \frac{q}{h} \left[\frac{S_{16}}{S_{11}} \cdot \frac{x}{b} \left(1 - 12 \frac{y^2}{b^2} \right) + 2 \left(\frac{2S_{12} + S_{66}}{4S_{11}} - \frac{S_{16}^2}{S_{11}^2} \right) \cdot \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b} \right) \right] \quad (4.83)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2h} \left(-1 + 3 \frac{y}{b} - 4 \frac{y^3}{b^3} \right) \quad (4.84)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{qx}{2I} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \frac{q}{h} \cdot \frac{S_{16}}{S_{11}} \left(\frac{y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} \right) \quad (4.85)$$

Substituindo-se nos coeficientes do tensor de compliância as constantes de engenharia:

$$S_{11} = \frac{1}{E_x}; \quad S_{12} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x}; \quad S_{16} = \frac{\eta_{xy,x}}{E_x}; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{xy}} \quad (4.86)$$

as equações tornam-se:

$$\sigma_x = -\frac{qx^2y}{2I} + \frac{q}{h} \left[\eta_{xy,y} \cdot \frac{x}{b} \left(1 - 12 \frac{y^2}{b^2} \right) + 2 \left(\left(-\frac{\nu_{xy}}{2} + \frac{E_x}{4G_{xy}} \right) - (\eta_{xy,x})^2 \right) \cdot \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b} \right) \right] \quad (4.87)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2h} \left(-1 + 3 \frac{y}{b} - 4 \frac{y^3}{b^3} \right) \quad (4.88)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{qx}{2I} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \frac{q}{h} \cdot \eta_{xy,x} \left(\frac{y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} \right) \quad (4.89)$$

Nota-se nas expressões de σ_x e τ_{xy} , a presença do coeficiente de influência mútua de 1ª espécie que, como já visto, quantifica a influência de tensões tangenciais em deformações normais. Para uma viga isotrópica, LEKHNITSKII et al. (1968) apresentam as seguintes tensões:

$$\sigma_x = -\frac{qx^2y}{2I} + \frac{q}{h} \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b} \right) \quad (4.90)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2h} \left(-1 + 3 \frac{y}{b} - 4 \frac{y^3}{b^3} \right) \quad (4.91)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{qx}{2I} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \quad (4.92)$$

E a expressão para a equação da linha elástica:

$$v = \frac{qS_{11}}{24I}(x^4 - 4l^3x + 3l^4) - \frac{qb^2}{80I} \left(3S_{12} + 4S_{66} - \frac{8}{3} \cdot \frac{S_{16}^2}{S_{11}} \right) (x-l)^2 \quad (4.93)$$

podendo também ser escrita como:

$$v = \frac{q}{24E_x I}(x^4 - 4l^3x + 3l^4) - \frac{qb^2}{80I} \left(-3 \frac{v_{xy}}{E_x} + 4 \cdot \frac{1}{G_{xy}} - \frac{8}{3} \cdot \frac{\eta_{xy,x}^2}{E_x} \right) (x-l)^2 \quad (4.94)$$

4.4.1.4.2 Caso 2: Viga Bi-Apoiada

Para uma viga simplesmente apoiada e fletida por uma carga uniformemente distribuída (Figura 4.10), de acordo com LEKHNITSKII et al. (1968) as fórmulas para as tensões σ_y e τ_{xy} são as mesmas para o caso anterior, e as tensões σ_x são dadas pela equação (4.95):

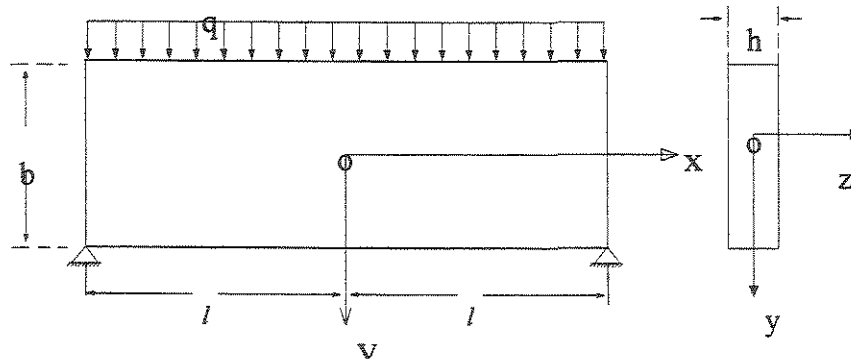


FIGURA 4.10– Viga bi-apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

$$\sigma_x = \frac{qy}{2I}(l^2 - x^2) + \frac{q}{h} \left[-\eta_{xy,x} \frac{x}{b} \left(1 - \frac{12y^2}{b^2} \right) + 2 \left(\left(-\frac{v_{xy}}{2} + \frac{E_x}{4G_{xy}} \right) - \eta_{xy,x}^2 \right) \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b} \right) \right] \quad (4.95)$$

e a equação para a linha elástica:

$$v = \frac{q}{24E_x I} (x^4 - 6l^2 x^2 + 5l^4) + \frac{qb^2}{80I} \left(-3 \frac{v_{xy}}{E_x} + 4 \cdot \frac{1}{G_{xy}} - \frac{32}{3} \cdot \frac{\eta_{xy,x}^2}{E_x} \right) (l^2 - x^2) \quad (4.96)$$

Observando-se as equações (4.94) e (4.96), onde também estão presentes os coeficientes de influência mútua de 1ª espécie, nota-se que os deslocamentos da linha elástica são diferentes dos apresentados por vigas isotrópicas (ou ortotrópicas).

4.4.1.5 Flexão de Vigas com Cargas Linearmente Distribuídas

Segundo LEKHNITSKII et al. (1968), com o uso de uma função polinomial de 6ª ordem é fácil se obter a solução para as tensões para uma viga carregada por forças distribuídas de maneira linear. A solução para uma viga engastada ortotrópica, conforme Figura 4.11, são:

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y + \frac{q_0}{10h} \cdot \frac{x}{l} \left(20 \frac{y^3}{b^3} - 3 \frac{y}{b} \right) \quad (4.97)$$

$$\sigma_y = \frac{q_0 x}{2hl} \left(-1 + 3 \frac{y}{b} - 4 \frac{y^3}{b^3} \right) \quad (4.98)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q_0 x^2}{4Il} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \frac{q_0 b}{160hl} \cdot \left(1 - 24 \frac{y^2}{b^2} + 80 \frac{y^4}{b^4} \right) \quad (4.99)$$

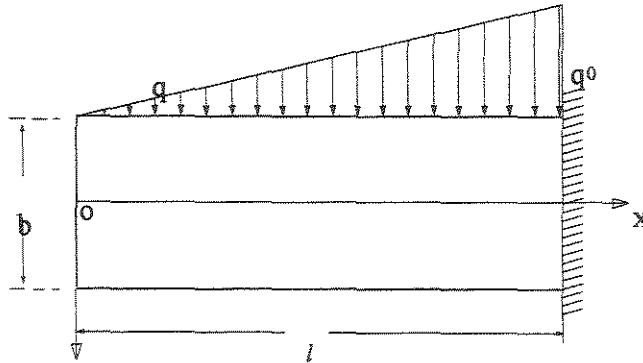


FIGURA 4.11– Viga ortotrópica submetida a um carregamento linear.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

Para vigas anisotrópicas, segundo LEKHNITSKII et al. (1968), não há dificuldade para encontrar soluções para as tensões, mas as fórmulas e equações serão mais trabalhosas devido ao fato das constantes S_{16} e S_{26} serem diferentes de zero.

4.4.1.6 Flexão de Vigas Submetidas a um Carregamento Distribuído de Forma Arbitrária

De acordo com LEKHNITSKII et al. (1968) é possível encontrar soluções para as tensões em vigas homogêneas submetidas a carregamentos normalmente distribuídos ao longo de seu comprimento, possuindo diferentes formas, através de funções de tensão. Quando um carregamento, em função de x , é dada na forma de um polinômio de grau n , então a correspondente função de tensão será definida como um polinômio de grau $(n + 5)$ em função de x e y .

Isto pode ser representado como a soma de polinômios homogêneos:

$$\phi = \sum_{k=2}^{n+5} P_k(x, y) \quad (4.100)$$

onde,

$$P_k(x, y) = A_{k0}x^k + A_{k1}x^{k-1}y + A_{k2}x^{k-2}y^2 + \dots + A_{kk}y^k \quad (4.101)$$

e A_{ki} são coeficientes constantes. Polinômios de segunda e terceira ordem satisfazem a equação (4.6) para quaisquer valores de coeficientes. Polinômios de maior ordem, quarta e quinta por exemplo, possuem 4 (quatro) coeficientes arbitrários e todos os outros podem ser expressos por esses.

Assim, por exemplo, para se obter as distribuições de tensões numa viga submetida a um carregamento dado como uma função quadrática em x (uma lei parabólica) é necessário tomar a

função de tensão como um polinômio de sétima potência, ou como uma soma de polinômios homogêneos de segunda até a sétima potência, conforme equação (4.101).

De acordo com LEKHNITSKII et al. (1968), em todos os casos de carregamento polinomiais, as equações para as tensões normais e tangenciais em cada seção transversal têm a seguinte forma:

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y + \Delta\sigma_x \quad (4.102)$$

$$\tau_{xy} = \frac{N}{2I} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) + \Delta\tau_{xy} \quad (4.103)$$

onde M e N são, respectivamente, momento fletor e força cortante numa dada seção. Os primeiros termos são obtidos pela teoria elementar de flexão, e os segundos consideram outros fatores, como a anisotropia.

De acordo com LEKHNITSKII et al. (1968), quando o carregamento é distribuído ao longo da viga segundo uma regra mais complicada, especialmente em casos quando somente um trecho da viga é carregado (Figura 4.12), então a distribuição de tensões pode ser obtida usando uma série de Fourier.

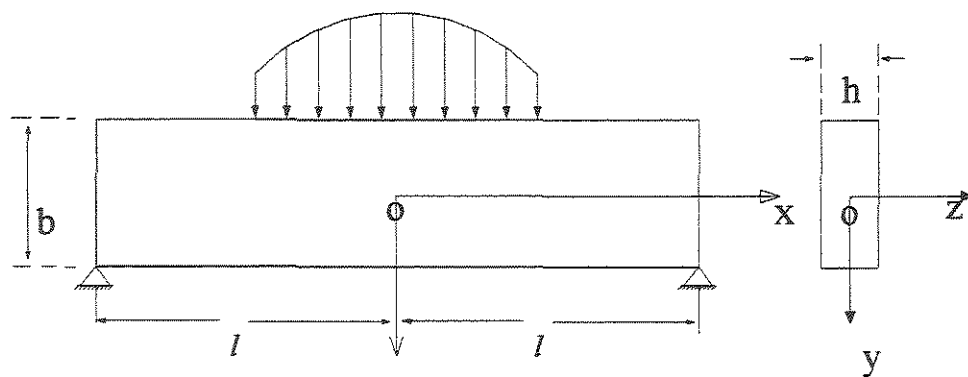


FIGURA 4.12– Viga possuindo somente um trecho carregado.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

4.4.2 O Método Analítico de Soluções Polinomiais de HASHIN (1967)

HASHIN (1967), utilizando a função de tensão de Airy, apresentou um método analítico de resolução de problemas planos envolvendo vigas anisotrópicas, submetidas a carregamentos polinomiais, o qual permite a construção de uma função de tensão polinomial:

$$\phi(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{m=M} \sum_{n=0}^{n=N} C_{mn} x_1^m x_2^n \quad (4.104)$$

onde C_{mn} são constantes a serem determinadas. Essa função será a solução da equação diferencial:

$$S_{2222} \phi_{,1111} - 4S_{2212} \phi_{,1112} + 2(S_{1122} + 2S_{1212}) \phi_{,1122} - 4S_{1112} \phi_{,1222} + S_{1111} \phi_{,2222} = 0 \quad (4.105)$$

Em seu método, HASHIN (1967) emprega as condições de contorno diretamente sobre a função de tensão. Para isso, considera uma parte de uma chapa genérica submetida a um estado plano de tensões, conforme Figura 4.13. As seguintes relações são obtidas sobre o contorno da chapa:

$$\phi = \int_0^s \{x_2 - x_2'(s)\} T_1(s) - \{x_1' - x_1(s)\} T_2(s) ds = M \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \int_0^s T_1(s) ds = P_1 \quad (4.107)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = \int_0^s T_2(s) ds = P_2 \quad (4.108)$$

onde s é um comprimento de arco tomado positivo no sentido anti-horário, iniciando-se de um ponto de referência A; T_1 e T_2 tensões tomadas como positivas na mesma orientação de x_1 e x_2 ; P_1 e P_2 forças prescritas e M um momento prescrito. Sem perda de generalidade com respeito aos valores das tensões, ϕ e suas primeiras derivadas são consideradas nulas no ponto inicial A. Para um sentido positivo de integração, as resultantes P_1 e P_2 são positivas quando apontam nas direções coordenadas positivas, enquanto o momento M é positivo no sentido anti-horário.

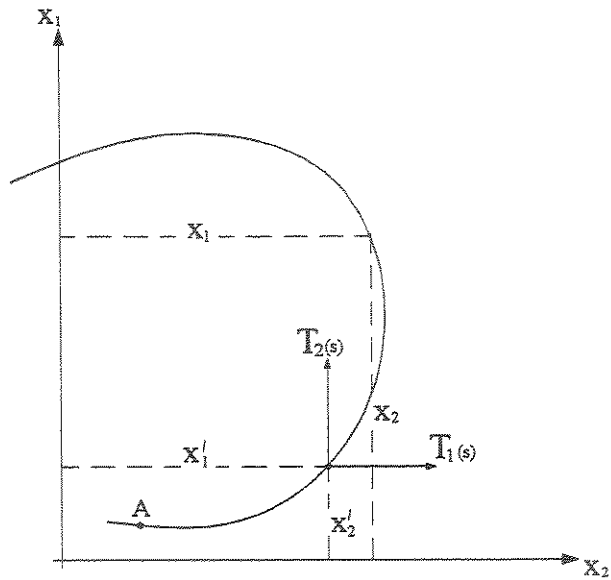


FIGURA 4.13 – Chapa genérica submetida a um estado plano de tensões.

Fonte: HASHIN (1967).

Para o desenvolvimento de seu método, HASHIN (1967) considera o seguinte problema específico:

- seja uma viga anisotrópica, sujeita a um estado plano de tensões, conforme a Figura 4.14. Para efeito de se determinar as condições de contorno, o ponto A é escolhido como $x_1 = 0$ e $x_2 = -b$.

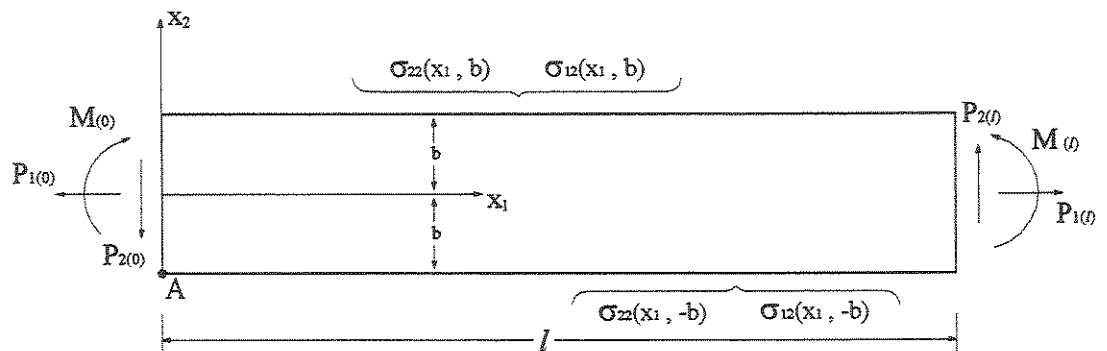


FIGURA 4.14 – Viga anisotrópica sujeita a um estado plano de tensões.

Fonte: HASHIN (1967).

Então das equações (4.106) e (4.107), sobre $x_2 = -b$:

$$\phi(x_1, -b) = \int_0^{x_1} (x_1 - x_1') \sigma_{22}(x_1', -b) dx_1' \quad (4.109)$$

$$\frac{\partial \phi(x_1, -b)}{\partial x_2} = - \int_0^{x_1} \sigma_{12}(x_1', -b) dx_1' \quad (4.110)$$

As tensões são tomadas como positivas e σ_{12} não contribui para o momento. Similarmente sobre $x_2 = b$,

$$\begin{aligned} \phi(x_1, b) &= \int_0^l (x_1 - x_1') \sigma_{22}(x_1', -b) dx_1' - 2b \int_0^l \sigma_{12}(x_1', -b) dx_1' + M_{(l)} + P_{2(l)}(l - x_1) \\ &+ P_{1(l)}b + \int_{x_1}^l (x_1' - x_1) \sigma_{22}(x_1', b) dx_1' \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\frac{\partial \phi(x_1, b)}{\partial x_2} = \int_0^l \sigma_{12}(x_1', -b) dx_1' + P_{1(l)} + \int_{x_1}^l \sigma_{12}(x_1', b) dx_1' \quad (4.112)$$

Aqui $P_1(l)$, $P_2(l)$ e $M(l)$ são respectivamente forças e momentos sobre $x_1 = l$. Assumindo-se agora que as tensões prescritas σ_{12} , σ_{22} , sobre $x_2 = \pm b$ são polinomiais em x_1 , então segue que (4.109 - 4.112) são também polinômios. E assim, as condições de contorno (4.109 - 4.112) podem também ser escritas na forma de polinômios:

$$\phi(x_1, -b) = \sum_{m=0}^{m=l} L_m x_1^m \quad (4.113)$$

$$\frac{\partial \phi(x_1, -b)}{\partial x_2} = \sum_{m=0}^{m=k} K_m x_1^m \quad (4.114)$$

$$\phi(x_1, b) = \sum_{m=0}^{m=q} Q_m x_1^m \quad (4.115)$$

$$\frac{\partial \phi(x_1, b)}{\partial x_2} = \sum_{m=0}^{m=p} P_m x_1^m \quad (4.116)$$

onde L_m , K_m , Q_m e P_m são coeficientes dos polinômios.

Introduzindo-se a equação (4.104) na equação diferencial (4.105) e equacionando-se os coeficientes $x_1^m x_2^n$, HASHIN (1967) desenvolve relações, entre os coeficientes C_{mn} , que servem de base para seu método:

$$\begin{aligned} & S_{2222} (m+2)(m+1)m(m-1)C_{m+2,n-2} - 4S_{2212} (m+1)m(m-1)(n-1)C_{m+1,n-1} \\ & + 2(S_{1122} + 2S_{1212})m(m-1)n(n-1)C_{mn} - 4S_{1112} (m-1)(n+1)n(n-1)C_{m-1,n+1} \\ & + S_{1111} (n+2)(n+1)n(n-1)C_{m-2,n+2} = 0 \end{aligned} \quad (4.117)$$

onde $m \geq 2$ e $n \geq 2$.

Os coeficientes C_{mn} envolvidos nas relações (4.117) podem ser organizados numa matriz, conforme Figura 4.15:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
m											
0	C_{00}	C_{01}	C_{02}	C_{03}	C_{04}	C_{05}	C_{06}	C_{07}	C_{08}	C_{09}	...
1	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}	...
2	C_{20}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	C_{27}	C_{28}	C_{29}	...
3	C_{30}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{38}	C_{39}	...
4	C_{40}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}	C_{45}	C_{46}	C_{47}	C_{48}	C_{49}	...
5	C_{50}	C_{51}	C_{52}	C_{53}	C_{54}	C_{55}	C_{56}	C_{57}	C_{58}	C_{59}	...
$M=6$	C_{60}	C_{61}	C_{62}	C_{63}	C_{64}	C_{65}	C_{66}	C_{67}	C_{68}	C_{69}	...
7	C_{70}	C_{71}	C_{72}	C_{73}	C_{74}	C_{75}	C_{76}	C_{77}	C_{78}	C_{79}	...
...

FIGURA 4.15 – Coeficientes C_{mn} para um caso específico $M = 6$.

Fonte: HASHIN (1967).

Se num problema específico, a maior potência da variável x_1 na equação (4.104) é M , então todos os coeficientes abaixo da linha M linha desaparecerão e não estarão presentes nas relações (4.117). Os elementos sombreados (mais escuros) na matriz são aqueles que, pela imposição do método ($m \geq 2$ e $n \geq 2$), não pertencem às relações.

O domínio dos coeficientes presentes nas relações (4.117) é formado pelos coeficientes localizados na região da matriz compreendida entre os 4 (quatro) espaços a direita na M^a linha e uma diagonal traçada a partir desse ponto até encontrar $m = 0$. A maior potência da variável x_2 é então $N = M+3$. Como exemplo, na Figura 4.15 estão representados (com o sombreado mais claro) os coeficientes pertencentes às relações (4.117) para o caso de $M = 6$. Considerando-se $N = M + 3$, a função de tensão (4.104) assume a forma:

$$\phi(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{m=Mn=M+3} \sum_{n=0} C_{mn} x_1^m x_2^n, \quad m+n \leq M+3 \quad (4.118)$$

O número de coeficientes C_{mn} envolvidos nas relações (4.117) pode ser obtido através da série aritmética:

$$S = \frac{1}{2}(M+1)(M+8) \quad (4.119)$$

O número de relações, entre os coeficientes C_{mn} , necessárias em cada problema específico será:

$$R = \frac{1}{2}M(M+1) \quad (4.120)$$

O número de equações adicionais para se compor o sistema de equações, necessário para se encontrar todos os coeficientes C_{mn} , é dado por:

$$B = 4(M+1) \quad (4.121)$$

Essas equações adicionais são encontradas através das condições de contorno (4.113 – 4.116). Para este propósito, M na função de tensão (4.118) será escolhido como a maior potência de x_1 que aparece em qualquer equação (4.113 - 4.116). Substituindo-se (4.118) no lado esquerdo das condições (4.113 – 4.116), são obtidas as seguintes equações polinomiais:

$$\sum_{m=0}^{m=Mn=M+3} \sum_{n=0} C_{mn} x_1^m (-b)^n = \sum_{m=0}^{m=M} L_m x_1^m \quad (4.122)$$

$$\sum_{m=0}^{m=Mn=M+3} \sum_{n=0} n C_{mn} x_1^m (-b)^{n-1} = \sum_{m=0}^{m=M} K_m x_1^m \quad (4.123)$$

$$\sum_{m=0}^{m=M} \sum_{n=0}^{n=M+3} C_{mn} x_1^m b^n = \sum_{m=0}^{m=M} Q_m x_1^m \quad (4.124)$$

$$\sum_{m=0}^{m=M} \sum_{n=0}^{n=M+3} n C_{mn} x_1^m b^{n-1} = \sum_{m=0}^{m=M} P_m x_1^m \quad (4.125)$$

Equacionando-se variáveis x_1 de iguais potências em ambos os lados de (4.122 - 4.125), são obtidas $M + 1$ equações de cada uma delas, e deste modo, um conjunto de $4.(M + 1)$ equações são obtidas, concordando-se assim com (4.121).

HASHIN (1967) resume assim seu método de solução: As tensões sobre $x_2 = \pm b$ são transformadas em condições de contorno do tipo (4.113 - 4.116) por meio de (4.109 - 4.112). A função de tensão ϕ é então dada por (4.118) com M sendo a maior potência da variável x_1 em (4.113 - 4.116). As relações (4.117) e as equações (4.122 - 4.125) então fornecem precisamente o número de equações lineares necessárias para se encontrar os coeficientes C_{mn} da função de tensão (4.118).

SANTANA & MASCIA (1996), estudando materiais ortotrópicos, adaptaram o método de solução polinomial de HASHIN (1967), empregando-o na análise de tensões de vigas compostas de madeira de diferentes espécies, incluindo madeira compensada, e destacando a facilidade de implementação deste método.

LEE & JOHNSON (1973), baseando-se também no método de HASHIN (1967), propuseram uma solução para o cálculo de tensões normais em vigas anisotrópicas, sujeitas a cargas transversais ou a cargas axiais, na qual os coeficientes da série que fornece σ_{11} , podem ser determinados separadamente sem a necessidade de se resolver um sistema de equações.

Visando ilustrar melhor seu método analítico de solução, HASHIN (1967) apresenta alguns exemplos de problemas planos envolvendo vigas anisotrópicas:

4.4.2.1 Viga Engastada

Para uma viga engastada anisotrópica, sujeita a uma carga concentrada conforme Figura 4.16, as condições de contorno são:

$$\sigma_{12}(x_1, -b) = \sigma_{22}(x_1, -b) = 0 \quad (4.126a)$$

$$\sigma_{12}(x_1, b) = \sigma_{22}(x_1, b) = 0 \quad (4.126b)$$

$$M_{(0)} = Pl \quad (4.126c)$$

$$P_{1(0)} = 0 \quad (4.126d)$$

$$P_{2(0)} = P \quad (4.127a)$$

$$M_{(l)} = 0 \quad (4.127b)$$

$$P_{1(l)} = 0 \quad (4.127c)$$

$$P_{2(l)} = -P \quad (4.127d)$$

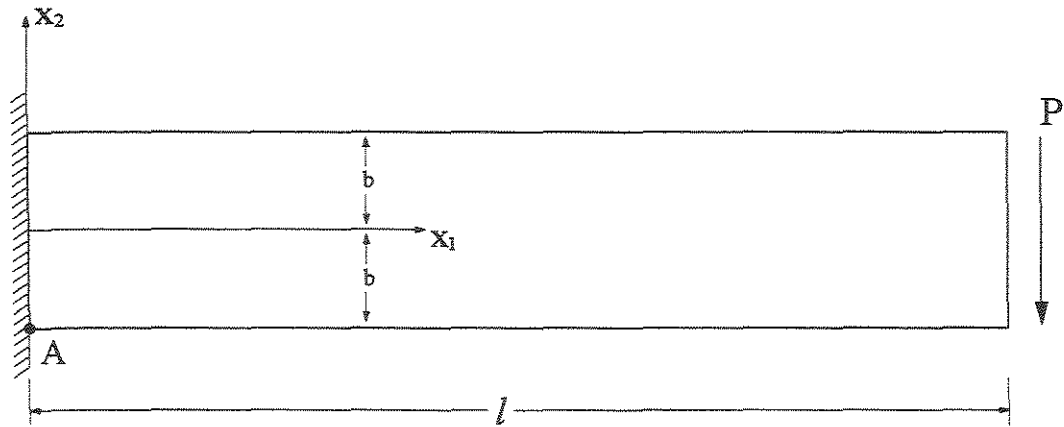


FIGURA 4.16 – Viga engastada anisotrópica sujeita a uma carga concentrada.

Fonte: HASHIN (1967).

Iniciando-se a integração no ponto A, no sentido anti-horário, as condições de contorno (4.109 – 4.112) tornam-se:

$$\phi(x_1, -b) = 0 \quad (4.128a)$$

$$\frac{\partial \phi(x_1, -b)}{\partial x_2} = 0 \quad (4.128b)$$

$$\phi(x_1, b) = -P(l - x_1) \quad (4.129a)$$

$$\frac{\partial \phi(x_1, b)}{\partial x_2} = 0 \quad (4.129b)$$

A maior potência de x_1 , M , nas condições de contorno é deste modo 1 (um). Então a maior potência de x_2 é $M + 3 = 4$. Finalmente a função de tensão (4.118) torna-se:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) &= \sum_{m=0}^{m=1} \sum_{n=0}^{n=4} C_{mn} x_1^m x_2^n = \\ &= C_{00} + C_{01}x_2 + C_{02}x_2^2 + C_{03}x_2^3 + C_{04}x_2^4 \\ &+ C_{10}x_1 + C_{11}x_1x_2 + C_{12}x_1x_2^2 + C_{13}x_1x_2^3 \end{aligned} \quad m+n \leq 4 \quad (4.130)$$

Substituindo-se (4.130) em (4.128 – 4.129) e equacionando-se os coeficientes de iguais potências em x_1 , as seguintes equações são obtidas:

De 4.128a:

$$\begin{aligned} C_{00} - C_{01}b + C_{02}b^2 - C_{03}b^3 + C_{04}b^4 &= 0 \\ C_{10} - C_{11}b + C_{12}b^2 - C_{13}b^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.131)$$

De 4.128b:

$$\begin{aligned} C_{01} - 2C_{02}b + 3C_{03}b^2 - 4C_{04}b^3 &= 0 \\ C_{11} - 2C_{12}b + 3C_{13}b^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.132)$$

De 4.129a:

$$\begin{aligned} C_{00} + C_{01}b + C_{02}b^2 + C_{03}b^3 + C_{04}b^4 &= Pl \\ C_{10} + C_{11}b + C_{12}b^2 + C_{13}b^3 &= P \end{aligned} \quad (4.133)$$

De 4.129b:

$$\begin{aligned} C_{01} + 2C_{02}b + 3C_{03}b^2 + 4C_{04}b^3 &= 0 \\ C_{11} + 2C_{12}b + 3C_{13}b^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.134)$$

A única relação (4.117) necessária é a correspondente a $m = 2$ e $n = 2$. Ela tem a forma:

$$-4S_{1112}C_{13} + 4S_{1111}C_{04} = 0 \quad (4.135)$$

Existem, deste modo, nove equações para os nove coeficientes indeterminados C_{mn} na função (4.130). Resolvendo-se o sistema de equações, a função de tensão resultante é então:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) = & -\frac{Pl}{2} \left(1 + \frac{\eta b}{2l} \right) - \frac{3Pl}{4b} x_2 + \frac{P\eta}{2b} x_2^2 + \frac{Pl}{4b^3} x_2^3 \\ & - \frac{P\eta}{4b^3} x_2^4 + \frac{p}{2} x_1 + \frac{3P}{4b} x_1 x_2 - \frac{P}{4b^3} x_1 x_2^3 \end{aligned} \quad (4.136)$$

$$\text{onde } \eta = \frac{S_{1112}}{S_{1111}} \quad (4.137)$$

As tensões são agora encontradas através da substituição de (4.136) em (4.4):

$$\sigma_{11} = \frac{P\eta}{b} \left(1 - \frac{3x_2^2}{b^2} \right) + \frac{3Px_2}{2b^3} (l - x_1) \quad (4.138)$$

$$\sigma_{22} = 0 \quad (4.139)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{3P}{4b} \left(1 - \frac{x_2^2}{b^2} \right) \quad (4.140)$$

4.4.2.2 Viga Bi-Apoiada

A viga anisotrópica bi-apoiada está detalhada na Figura 4.17, e as condições de contorno são:

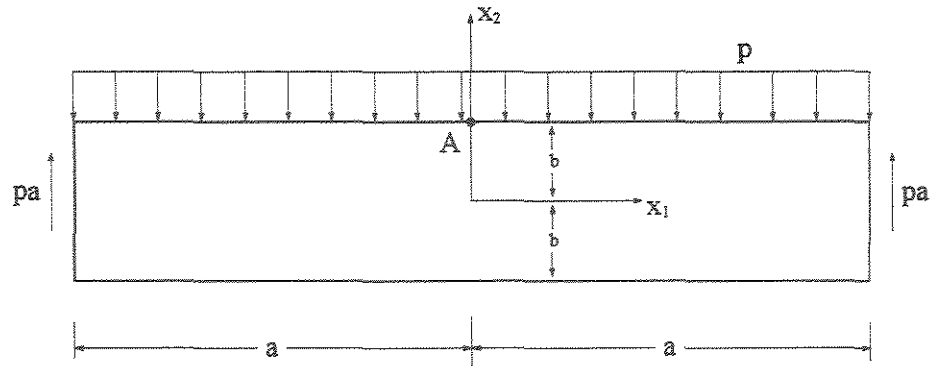


FIGURA 4.17 – Viga bi-apoiada anisotrópica sujeita a um carregamento distribuído.

Fonte: HASHIN (1967).

$$\sigma_{12}(x_1, -b) = \sigma_{22}(x_1, -b) = 0 \quad (4.141a)$$

$$\sigma_{12}(x_1, b) = 0 \quad (4.141b)$$

$$\sigma_{22}(x_1, b) = -p \quad (4.141c)$$

$$M_{(\pm a)} = 0 \quad (4.142a)$$

$$P_{1(\pm a)} = 0 \quad (4.142b)$$

$$P_{2(\pm a)} = pa \quad (4.142c)$$

O ponto inicial de integração A é escolhido em $x_1 = 0$ e $x_2 = b$. As condições de contorno para o presente caso assumem a forma:

$$\phi(x_1, -b) = 0 \quad (4.143a)$$

$$\frac{\partial \phi(x_1, -b)}{\partial x_2} = 0 \quad (4.143b)$$

$$\phi(x_1, b) = -\frac{px_1^2}{2} \quad (4.144a)$$

$$\frac{\partial \phi(x_1, b)}{\partial x_2} = 0 \quad (4.144b)$$

A maior potência de x_1 nas condições de contorno é $M = 2$, e a função de tensão:

$$\phi(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{m=2} \sum_{n=0}^{n=5} C_{mn} x_1^m x_2^n \quad m + n \leq 5 \quad (4.145)$$

O procedimento de solução é análogo ao efetuado para a viga engastada. Existem no presente caso 15 (quinze) coeficientes C_{mn} . Introduzindo-se (4.143 - 4.144) em (4.122 - 4.125) são obtidas 12 (doze) equações, enquanto 3 (três) equações adicionais são fornecidas pelas relações (4.117). E por fim, os resultados para as tensões são:

$$\sigma_{11} = \frac{3p}{4b^3} (x_1^2 - a^2) x_2 + \frac{3p\eta}{b} \left(\frac{x_2^2}{b_2} - \frac{1}{3} \right) x_1 + \frac{p\beta}{2b} \left(\frac{x_2^2}{b_2} - \frac{3}{5} \right) x_2 \quad (4.146)$$

$$\sigma_{22} = \frac{p}{4} \left(\frac{x_2^3}{b_3} - 3 \frac{x_2}{b} - 2 \right) \quad (4.147)$$

$$\sigma_{12} = \frac{p}{4b} (4\eta x_2 + 3x_1) \left(1 - \frac{x_2^2}{b^2} \right) \quad (4.148)$$

onde η é dado por (4.137) e $\beta = 8 \left(\frac{S_{1112}}{S_{1111}} \right)^2 - \frac{S_{1122} + 2S_{1212}}{S_{1111}}$.

4.4.2.3 Cálculo dos Deslocamentos

Os deslocamentos planos u_1 e u_2 também podem ser calculados através da função de tensão ϕ . Para este propósito, a relação constitutiva (4.2) pode ser reescrita na forma:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = S_{1111} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + S_{1122} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - 2S_{1112} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.149a)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = S_{1122} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + S_{2222} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - 2S_{2212} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.149b)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = S_{1112} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + S_{2212} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - 2S_{1212} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.149c)$$

onde foi usada a função de Airy ϕ .

Integrando-se (4.149 a, b) com respeito a x_1 e a x_2 , respectivamente, obtém-se:

$$u_1 = S_{1111} \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} dx_1 + S_{1122} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - 2S_{1112} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + f(x_2) \quad (4.150a)$$

$$u_2 = S_{1122} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + S_{2222} \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} dx_2 - 2S_{2212} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + g(x_1) \quad (4.150b)$$

onde f e g são funções arbitrárias. Inserindo-se (4.150) em (4.149c) e arranjando-se o resultado, a seguinte equação diferencial é obtida:

$$\begin{aligned} & S_{1111} \int \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_2^3} dx_1 + S_{2222} \int \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_1^3} dx_2 + 2(S_{1122} + 2S_{1212}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} - 4S_{1112} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \\ & - 4S_{2212} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{dg(x_1)}{dx_1} + \frac{df(x_2)}{dx_2} = 0 \end{aligned} \quad (4.151)$$

Esta relação, segundo HASHIN (1967), serve para se encontrar as funções desconhecidas g e f , independente das constantes arbitrárias de integração, as quais são determinadas pelas condições de contorno para a viga deformada.

Como exemplo, HASHIN (1967) calcula os deslocamentos da viga engastada, sujeita a uma carga concentrada na extremidade livre (Figura 4.16). A função de tensão (4.136) é introduzida na equação (4.151), assim (utilizando-se ainda as equações (4.134)), somente funções de x_1 ou de x_2 permanecem. Conseqüentemente, g e f podem ser encontradas por integração:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= -3S_{1111} C_{03} x_1^2 - S_{1111} C_{13} x_1^3 + Ax_1 + B \\ f(x_2) &= 12S_{1112} C_{03} x_2^2 - 2[(S_{1122} + 2S_{1212})C_{13} - 8S_{1112} C_{04}] x_2^3 + Cx_2 + D \\ A + C &= 2[-(S_{1122} + 2S_{1212})C_{11} + 4S_{1112} C_{02}] \end{aligned} \quad (4.152)$$

aqui, A , B , C e D são constantes desconhecidas, e os C_{mn} são os coeficientes dados pela função de tensão (4.136).

As condições de contorno de extremidade são:

$$u_1(0,0) = 0 \quad (4.153a)$$

$$u_2(0,0) = 0 \quad (4.153b)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0,0) = 0 \quad (4.153c)$$

Agora (4.150a, b) pode ser calculada pelo uso de função de tensão (4.136) e das funções (4.152a, b). Com o uso das condições de contorno (4.153) e das equações (4.152) as constantes A, B, C e D são encontradas. A equação da linha elástica resultante é:

$$u_2(x_1,0) = -\frac{S_{III}P}{6I}(3lx_1^2 - x_1^3) \quad (4.154)$$

onde I é o momento de inércia da seção transversal.

Com a apresentação do cálculo dos deslocamentos pelo método de solução polinomial de HASHIN (1967), é finalizada a revisão bibliográfica sobre a aplicação da função de tensão ϕ na solução de problemas planos. No item seguinte, é feito um comentário sobre alguns métodos de resolução de problemas na elasticidade que não são aplicados neste trabalho. A finalidade é apenas evidenciar a possibilidade de aplicação de outros métodos na resolução de problemas envolvendo sólidos anisotrópicos.

4.5 Discussão Sobre Solução de Problemas da Elasticidade

Em geral, um problema da elasticidade consiste em se encontrar as tensões e as deformações num corpo elástico sujeito às forças de superfície e deslocamentos. De acordo com SAADA (1974), a solução de um problema de elasticidade, o mais geral, requer a resolução de um sistema de 15 (quinze) equações, ou seja, as 3 (três) equações de equilíbrio, 6 (seis) relações tensão-deformação, 6 (seis) relações deformação-deslocamento, com 15 (quinze) incógnitas (σ_{ij} , ϵ_{ij} , u_i).

Para este fim, muitos métodos, numéricos ou analíticos, podem ser empregados. Em se tratando de problemas elásticos envolvendo sólidos anisotrópicos, após a modelagem do problema na forma de uma equação diferencial, é preciso definir qual o método mais adequado para a resolução desta equação, e assim, obter a solução do problema.

Os métodos variacionais, relacionados à investigação de máximos e mínimos de funcionais, são baseados no fato de que os problemas da elasticidade podem ser tratados com as considerações da energia potencial envolvida, que é um funcional, e o equilíbrio obtido pela minimização da expressão da energia. O uso de métodos baseados na energia evita a resolução direta das equações diferenciais do problema.

MURAKAMI et al. (1996), aplicando métodos variacionais, estudaram o efeito das deformações devido ao cisalhamento sobre as deflexões de vigas engastadas anisotrópicas, de seções retangulares, sujeitas a um estado plano de tensões ou de deformações.

Dentre os métodos numéricos, o método dos elementos finitos e o dos elementos de contorno são os mais utilizados. O método dos elementos finitos transforma o trabalho de se encontrar uma função que realiza um extremo num funcional na procura do extremo de uma função com vários parâmetros, neste caso, na resolução de um sistema de equações lineares que

determine os valores da função incógnita nos pontos desejados. A aproximação tende a ser melhor quanto maior for o número de elementos em que se divide a estrutura.

No estudo de materiais anisotrópicos, tratando-se especialmente da madeira, AL-DABBAGH et al. (1972), aplicaram o Método dos Elementos Finitos para a análise tridimensional de tais materiais. Em seu estudo, utilizaram elementos discretizados na forma de paralelepípedos. Vários exemplos de aplicação do método e comparações com soluções analíticas da elasticidade, são apresentadas. Na Figura 4.18, tem-se um exemplo:

LEGENDA

bloco indeformado — — — —

análise MEF —————

análise elementar - - - - -

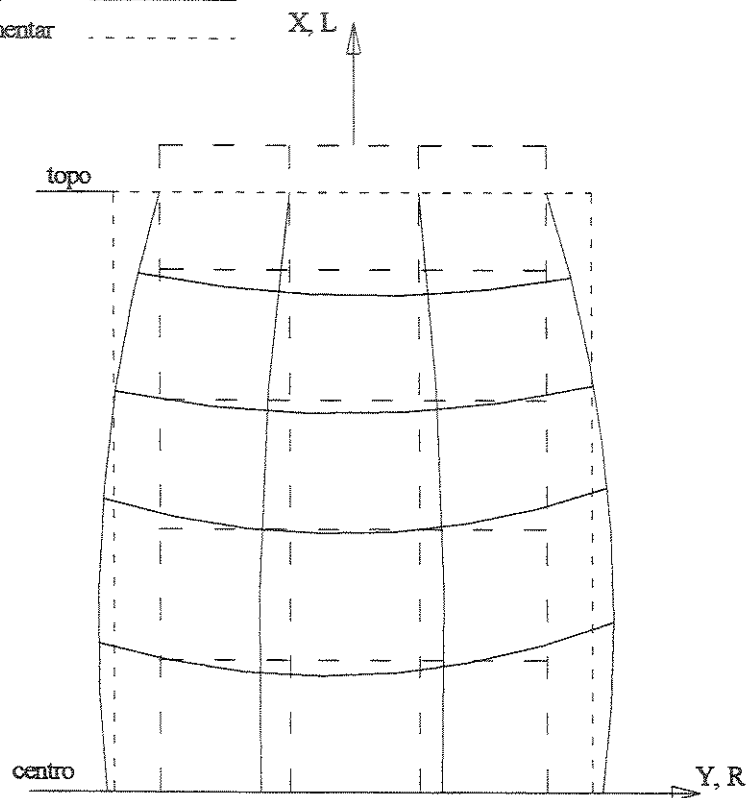


FIGURA 4.18 - Bloco de madeira antes e depois da deformação. Análise pelo MEF.

Fonte: AL-DABBAGH et al. (1972).

O Método dos Elementos de Contorno consiste na transformação das equações diferenciais dos problemas, geralmente descrevendo o comportamento da solução incógnita, numa equação integral que relaciona somente valores de contorno do problema. Um trabalho dirigido à aplicação do método dos elementos de contorno em problemas elásticos anisotrópicos tri-dimensionais, foi realizado por SCHCLAR (1994), onde estão apresentados vários exemplos.

Realizado o comentário sobre outros métodos de solução para problemas envolvendo sólidos anisotrópicos, pode-se agora descrever a metodologia analítica a ser empregada no presente trabalho.

5 METODOLOGIA ANALÍTICA

Concluída a fase de fundamentação teórica, apresenta-se, neste capítulo, a metodologia empregada na análise das distribuições de tensões e de deformações dos sólidos anisotrópicos estudados no trabalho.

5.1 Análise dos Exemplos de LEKHNITSKII et al. (1968)

Procurando-se analisar melhor a diferença de comportamento em relação às tensões e às deformações entre vigas anisotrópicas e isotrópicas, são estudadas as soluções desenvolvidas por LEKHNITSKII et al. (1968) para as vigas anisotrópicas e que foram apresentadas nos itens 4.4.1.4.1 e 4.4.1.4.2, para uma viga engastada e para uma bi-apoiada, respectivamente. A análise é baseada nas equações fornecidas, e gráficos comparativos, com os resultados obtidos para uma viga isotrópica, são apresentados.

Para a geometria das vigas analisadas nos exemplos, adotou-se a mesma para as anisotrópicas e para as isotrópicas, facilitando-se assim a análise comparativa. Para as vigas isotrópicas são consideradas as mesmas equações, porém omitindo-se os termos onde estão presentes os coeficientes de influência mútua de 1ª espécie ($\eta_{xy,x}$).

São estudados quatro exemplos de vigas, diferenciadas pelo material anisotrópico que as constituem. Em cada exemplo, uma espécie de madeira é adotada como o material anisotrópico que compõe a viga em questão na análise. As espécies adotadas são: **guapuruvú** e **ipê** (madeiras brasileiras); e **ash** e **maple** (madeiras norte-americanas). A escolha dessas madeiras se deu pelo fato de suas constantes elásticas serem registradas em trabalhos científicos, evitando-se assim, ensaios em laboratório.

5.2 Análise do Método de Solução Polinomial de HASHIN (1967)

Seguindo-se os mesmos procedimentos de análise realizados com os exemplos de LEKHNITSKII et al. (1968), analisa-se também os exemplos de HASHIN (1967) dando-se ênfase a elaboração de gráficos comparativos de tensões entre vigas anisotrópicas e isotrópicas. Duas espécies de madeiras são consideradas como material anisotrópico que constituem a viga: a **guapuruvú** e a **ipê**.

5.3 Determinação de Funções de Tensão

Analisa-se ainda neste trabalho, outros exemplos de vigas anisotrópicas, visando-se a obtenção de soluções que possam explicar, de forma completa ou parcial, o comportamento dos sólidos anisotrópicos. Assim, tendo-se modelado o problema elástico na forma de uma equação diferencial parcial de 4ª ordem (equação 4.6), é procurada sua solução através de uma função de tensão, e a partir desta, obter as tensões e as deformações.

Com esse intuito, o método de solução polinomial de HASHIN (1967) é aplicado na resolução de duas vigas anisotrópicas engastadas, uma sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e outra sujeita a um carregamento triangular. Para a resolução do sistema de equações

lineares, que fornece os coeficientes desconhecidos C_{mn} , é utilizado o *software* MATHEMATICA¹.

5.4 Estudo dos Sistemas Compósitos em Camadas

Um estudo sobre os sistemas compósitos em camadas, especialmente madeira laminada, também é desenvolvido neste trabalho, dando-se ênfase a determinação das suas propriedades elásticas, e também, analisando-se as distribuições de tensões nesses sistemas quando eles são submetidos à flexão.

A aplicação da função de Airy na solução dos problemas de vigas laminadas é abordada. Baseando-se nos resultados obtidos por LEKHNITSKII et al. (1968), gráficos sobre o comportamento das tensões nessas vigas são apresentados.

¹ O MATHEMATICA é um sistema genérico de computação técnica, com grande capacidade numérica, simbólica e gráfica que permite que ele seja utilizado como ferramenta interativa de cálculo bem como uma linguagem de programação. Também é possível utilizá-lo como plataforma para experimentação e modelagem de algorítmicos, bem como interagi-lo com outros programas.

6 ANÁLISE COMPARATIVA DOS EXEMPLOS DE LEKHNITSKII et al. (1968)

Neste capítulo, são apresentados alguns diagramas comparativos de tensões e de deslocamentos, entre vigas anisotrópicas e isotrópicas, com a finalidade de se analisar as equações determinadas por LEKHNITSKII et al. (1968) para as tensões atuantes em vigas anisotrópicas sujeitas a carregamentos uniformemente distribuídos. Primeiramente são analisados os resultados para as vigas engastadas e depois para as bi-apoiadas.

6.1 Caso 1: Viga Engastada

Para a elaboração dos gráficos comparativos para a viga da Figura 6.1, é preciso recorrer aos resultados apresentados por LEKHNITSKII et al. (1968) para as tensões. São eles:

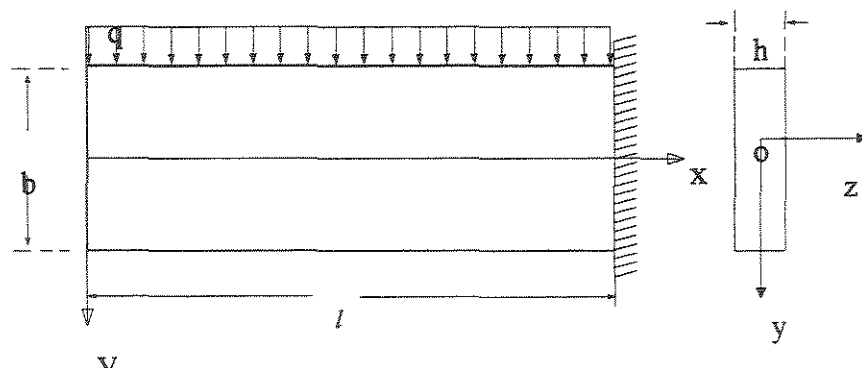


FIGURA 6.1– Viga engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

Para as tensões normais:

$$\sigma_x = -\frac{qx^2y}{2I} + \frac{q}{h} \left[\frac{S_{16}}{S_{11}} \cdot \frac{x}{b} \left(1 - 12 \frac{y^2}{b^2} \right) + 2 \left(\frac{2S_{12} + S_{66}}{4S_{11}} - \frac{S_{16}^2}{S_{11}^2} \right) \cdot \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b} \right) \right] \quad (6.1)$$

Para as de cisalhamento:

$$\tau_{xy} = -\frac{qx}{2I} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \frac{q}{h} \cdot \frac{S_{16}}{S_{11}} \left(\frac{y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} \right) \quad (6.2)$$

Substituindo-se nos coeficientes do tensor de compliância as constantes usuais em engenharia:

$$S_{11} = \frac{1}{E_x}; \quad S_{12} = -\frac{\nu_{yx}}{E_x}; \quad S_{16} = \frac{\eta_{xy,x}}{E_x}; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{xy}} \quad (6.3)$$

as equações tornam-se:

$$\sigma_x = -\frac{qx^2y}{2I} + \frac{q}{h} \left[\eta_{xy,y} \cdot \frac{x}{b} \left(1 - 12 \frac{y^2}{b^2} \right) + 2 \left(\left(-\frac{\nu_{xy}}{2} + \frac{E_x}{4G_{xy}} \right) - (\eta_{xy,x})^2 \right) \cdot \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b} \right) \right] \quad (6.4)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{qx}{2I} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \frac{q}{h} \cdot \eta_{xy,x} \left(\frac{y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} \right) \quad (6.5)$$

Para uma viga isotrópica, LEKHNITSKII et al. (1968) apresentam as seguintes tensões:

$$\sigma_x = -\frac{qx^2y}{2I} + \frac{q}{h} \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b} \right) \quad (6.6)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2h} \left(-1 + 3 \frac{y}{b} - 4 \frac{y^3}{b^3} \right) \quad (6.7)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{qx}{2I} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \quad (6.8)$$

E a expressão para a equação da linha elástica:

$$v = \frac{q}{24E_x I} (x^4 - 4l^3 x + 3l^4) - \frac{qb^2}{80I} \left(-3 \frac{\nu_{xy}}{E_x} + 4 \cdot \frac{1}{G_{xy}} - \frac{8}{3} \cdot \frac{\eta_{xy,x}^2}{E_x} \right) (x-l)^2 \quad (6.9)$$

Observando-se a equação (6.9), onde também está presente o coeficiente de influência mútua de 1ª espécie, nota-se que a deformação da elástica será diferente a da apresentada por vigas isotrópicas (ou ortotrópicas). Procurando-se analisar melhor a diferença de comportamento, em relação às tensões e às deformações, entre uma viga anisotrópica engastada e uma isotrópica, também engastada, apresenta-se a seguir alguns exemplos, basendo-se na formulação anterior fornecida por LEKHNITSKII et al. (1968).

São abordados 4 (quatro) exemplos, onde espécies de madeiras são adotadas como o material anisotrópico que compõe as vigas. A geometria das vigas analisadas nos exemplos é a mesma, facilitando-se assim a análise comparativa. Para as vigas isotrópicas, são consideradas as mesmas equações, mas omitindo-se os termos onde estão presentes os coeficientes de influência mútua de 1ª espécie ($\eta_{xy,x}$).

Baseando-se na figura 6.1, arbitra-se os seguintes dados:

$$q = 20 \text{ KN/m} ; \quad l = 1.50 \text{ m} ; \quad h = 0.10 \text{ m} ; \quad b = 0.40 \text{ m} ;$$

e assim,

$$I = 5.33 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Considerando-se a viga constituída primeiramente de madeira da espécie **guapuruvú**, os valores para as constantes elásticas são (MASCIA, 1991):

$$E_L = E_x = 3507.5 \text{ MPa} = 3.507.500,00 \text{ KN/m}^2$$

$$\nu_{LR} = \nu_{xy} = 0,4149;$$

$$G_{LR} = G_{xy} = 420.8 \text{ MPa} = 420.800,00 \text{ KN/m}^2$$

$$\eta_{xy,x} = 0,5364$$

Substituindo-se esses valores, e os dados da viga e do carregamento, na equação (6.9), obtém-se, as equações para a linha elástica:

Para a viga anisotrópica:

$$v = 4,4547 \times 10^{-10} (x^4 - 4l^3x + 3l^4) - 6,70 \times 10^{-6} (x - l)^2 \quad (\text{em cm}) \quad (6.10)$$

Para a viga isotrópica:

$$v = 4,4547 \times 10^{-10} (x^4 - 4l^3x + 3l^4) \quad (\text{em cm}) \quad (6.11)$$

Por meio dessas equações, é possível se obter o seguinte gráfico comparativo:

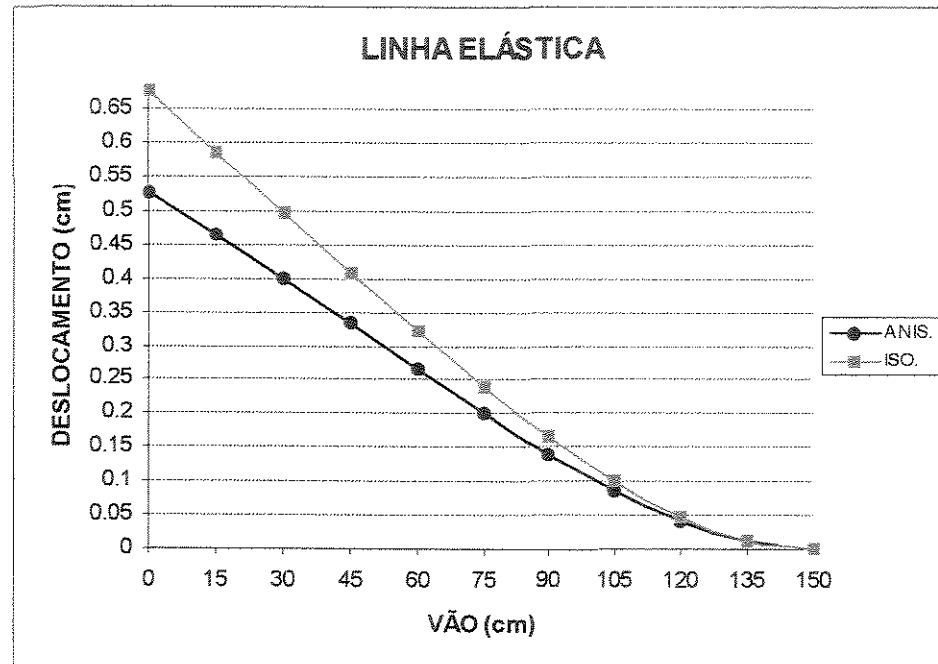


FIGURA 6.2– Deslocamentos de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie guapuruvú, e de uma viga engastada isotrópica.

Utilizando-se das mesmas constantes elásticas, pode-se também comparar as tensões normais (σ_x) e de cisalhamento (τ_{xy}) para as duas espécies de vigas na seção $x = 150$ cm:

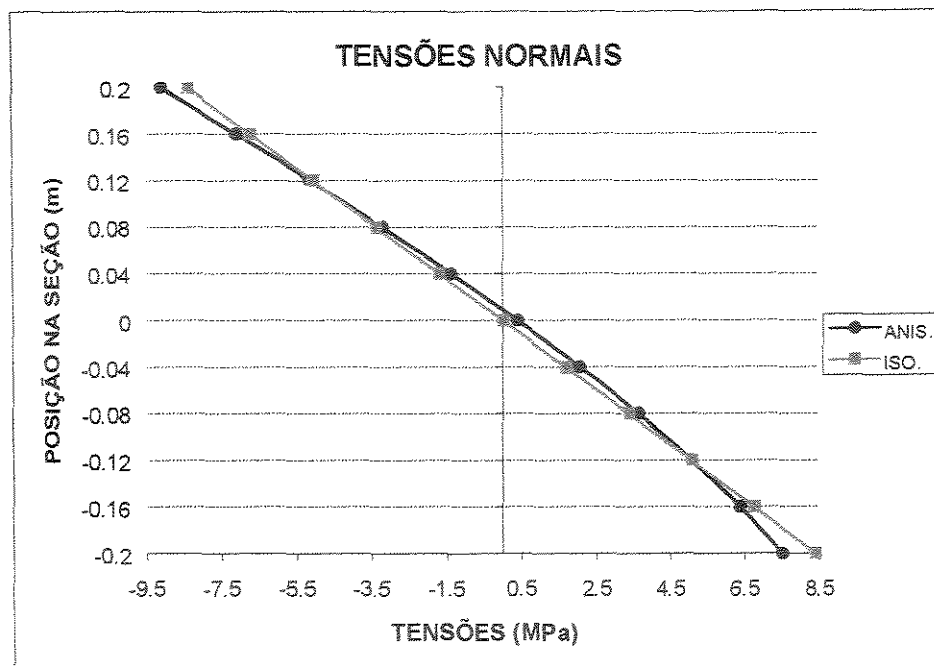


FIGURA 6.3– Distribuições de tensões normais de uma viga engastada anisotrópica, de madeira espécie **guapuruvú**, e de uma viga engastada isotrópica.

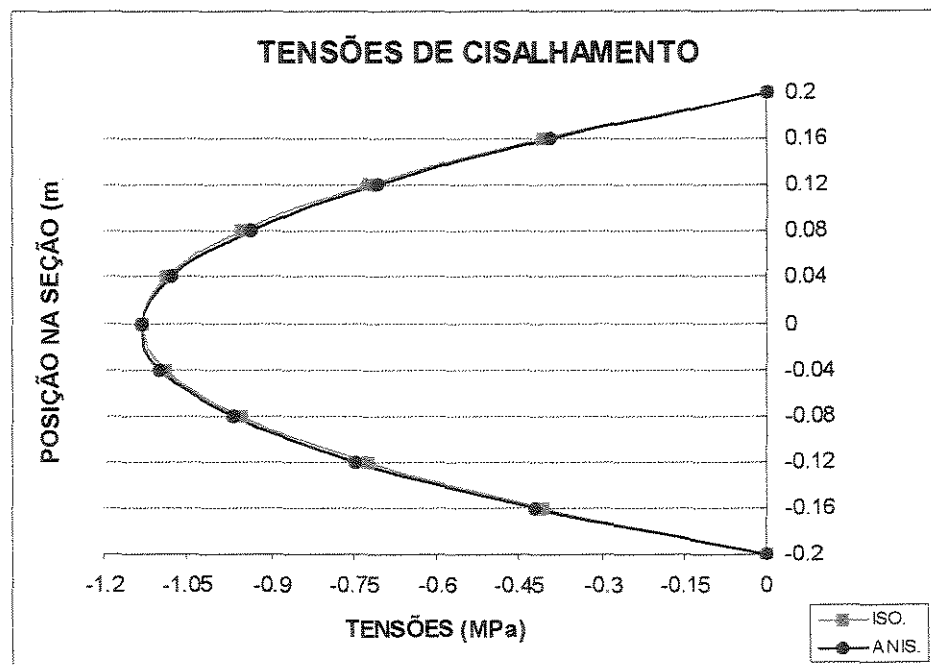


FIGURA 6.4– Distribuições de tensões tangenciais de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie **guapuruvú**, e de uma viga engastada isotrópica.

Para vigas constituídas de madeira da espécie ipê, tem-se para as constantes elásticas (MASCIA, 1991):

$$E_x = 18044,00 \text{ MPa} = 18.043.900,00 \text{ KN/m}^2$$

$$\nu_{xy} = 0,4345;$$

$$G_{xy} = 620,2 \text{ MPa} = 620.200,00 \text{ KN/m}^2$$

$$\eta_{xy,x} = 1,3051.$$

Obtém-se, então, os seguintes gráficos:

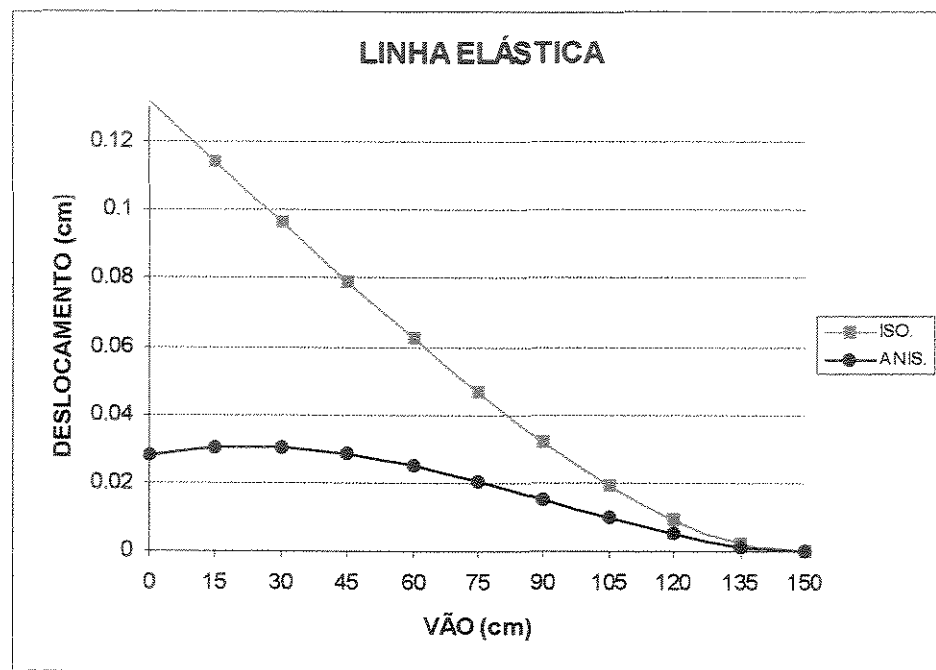


FIGURA 6.5– Deslocamentos de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie ipê e de uma viga engastada isotrópica.

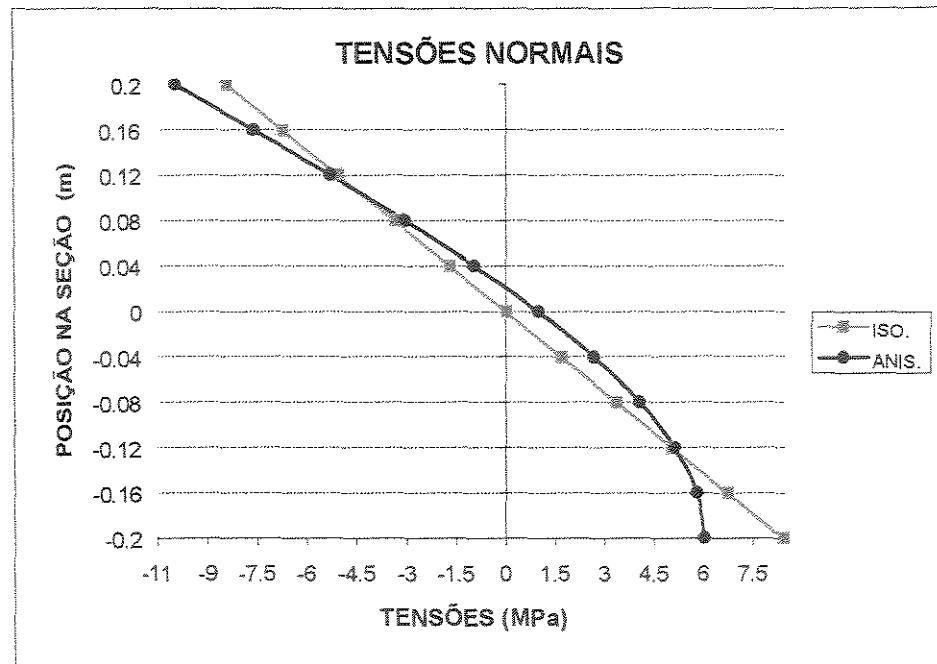


FIGURA 6.6– Distribuições de tensões normais de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie **ipê**, e de uma viga engastada isotrópica.

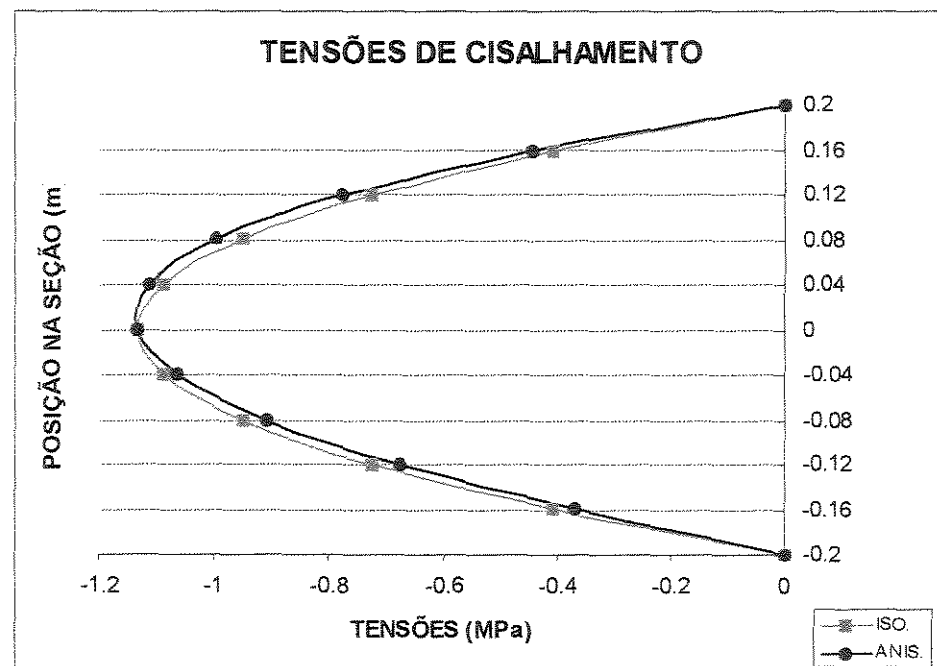


FIGURA 6.7– Distribuições de tensões tangenciais de uma viga engastada anisotrópica, de madeira espécie **ipê**, e de uma viga engastada isotrópica.

Para vigas constituídas de madeira da espécie **ash** (espécie norte-americana), têm-se para as constantes elásticas (HEARMON, 1948):

$$E_x = 16116,00 \text{ Mpa} = 16.116.000,00 \text{ KN/m}^2$$

$$\nu_{xy} = 0,4600;$$

$$G_{xy} = 1366,8 \text{ Mpa} = 1.366.800,00 \text{ KN/m}^2$$

$$\eta_{xy,x} = 0,90 \text{ (valor arbitrado).}$$

O valor para o coeficiente de influência mútua de 1ª espécie foi arbitrado, pois, HEARMON (1948) não determinou experimentalmente esse valor. A escolha pelo valor 0,90 está baseada no fato de se procurar examinar um valor intermediário entre os valores para os coeficientes de influência mútua das espécies **guapuruvú** e **ipê**.

Assim, pode-se obter os seguintes gráficos:

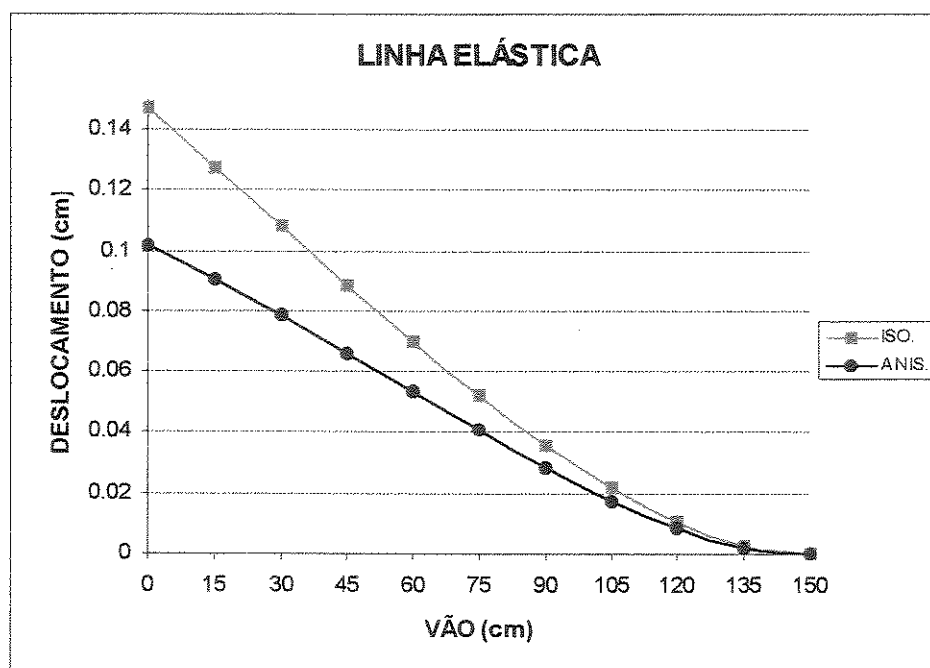


FIGURA 6.8– Deslocamentos de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie **ash**, e de uma viga engastada isotrópica.

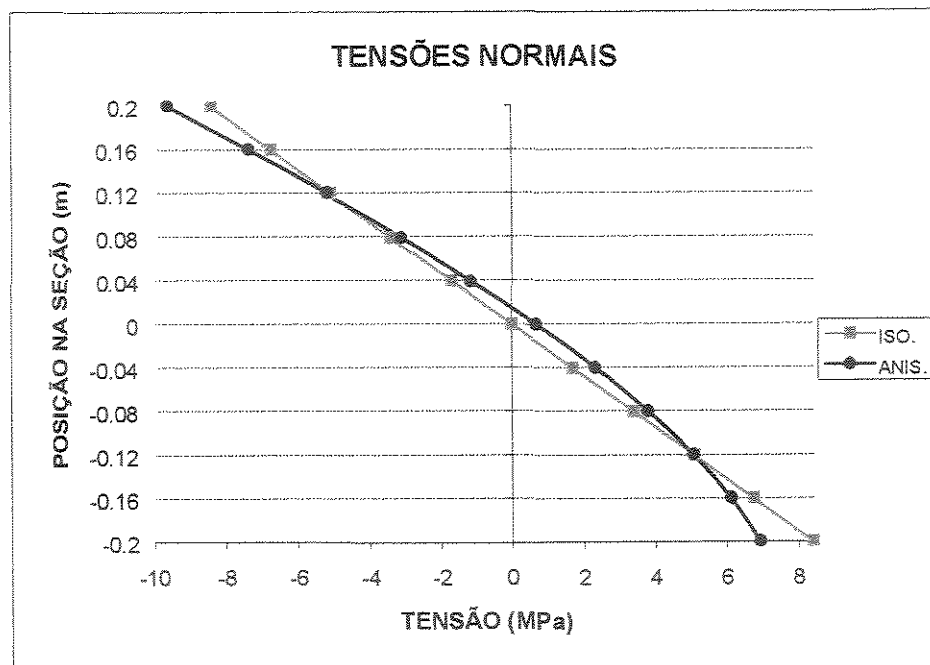


FIGURA 6.9– Distribuições de tensões normais de uma viga engastada anisotrópica, de madeira espécie *ash*, e de uma viga engastada isotrópica.

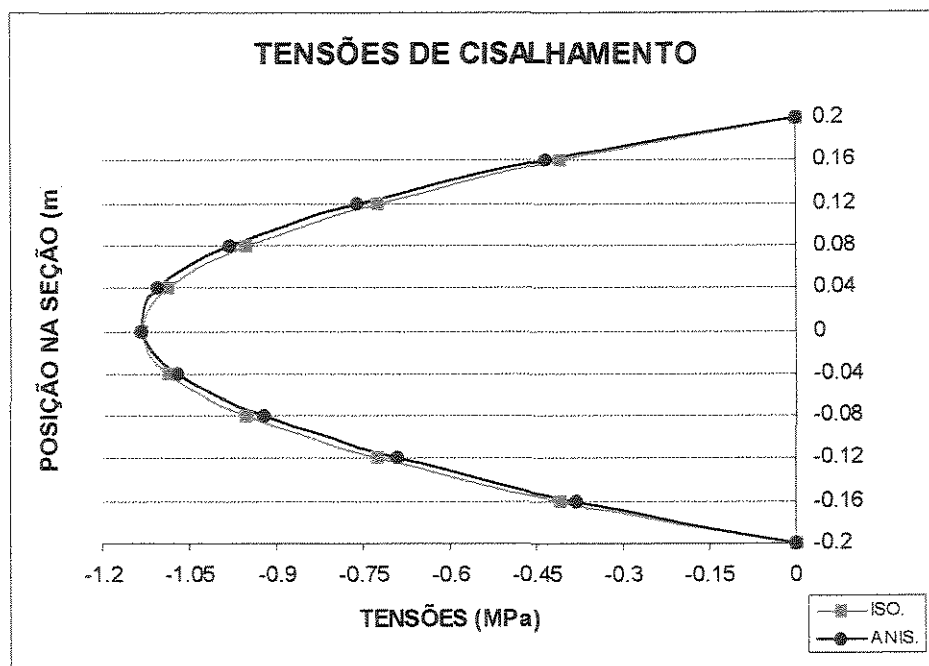


FIGURA 6.10– Distribuições de tensões tangenciais de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie *ash*, e de uma viga engastada isotrópica.

Para vigas constituídas de madeira da espécie **maple** (espécie norte-americana), têm-se para as constantes elásticas (HEARMON, 1948):

$$E_x = 10200,00 \text{ MPa} = 10.200.000,00 \text{ KN/m}^2$$

$$\nu_{xy} = 0,4600;$$

$$G_{xy} = 1244,4 \text{ MPa} = 1.244.400,00 \text{ KN/m}^2$$

$$\eta_{xy,x} = 0,30.$$

Novamente adotou-se um valor para o coeficiente $\eta_{xy,x}$ (0,30), procurando-se assim, examinar um valor menor do que o utilizado para as outras espécies de madeiras. Obtém-se, então, os seguintes gráficos:

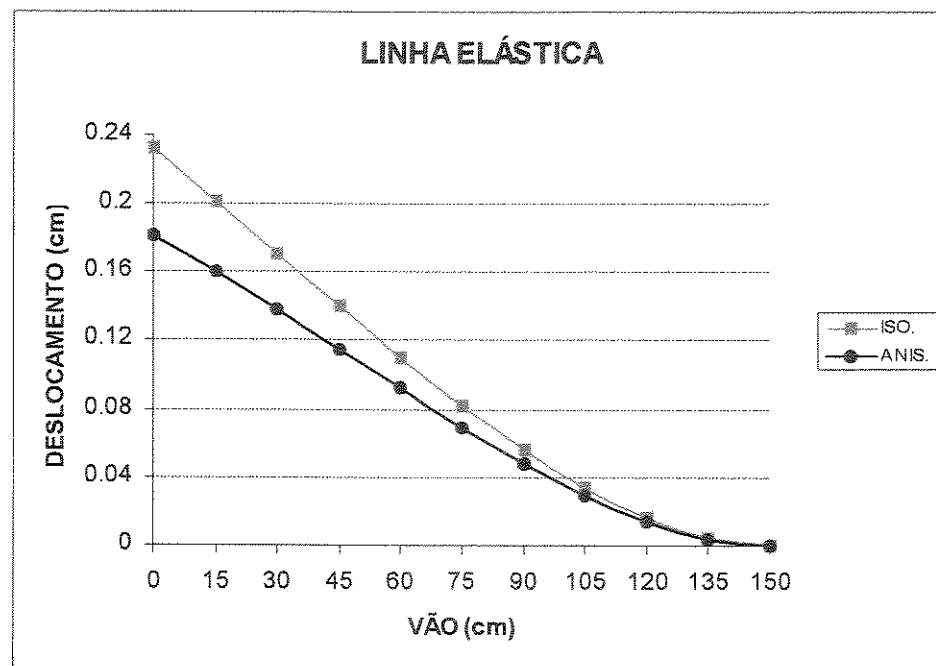


FIGURA 6.11– Deslocamentos de uma viga engastada anisotrópica de madeira, espécie **maple**, e de uma viga engastada isotrópica.

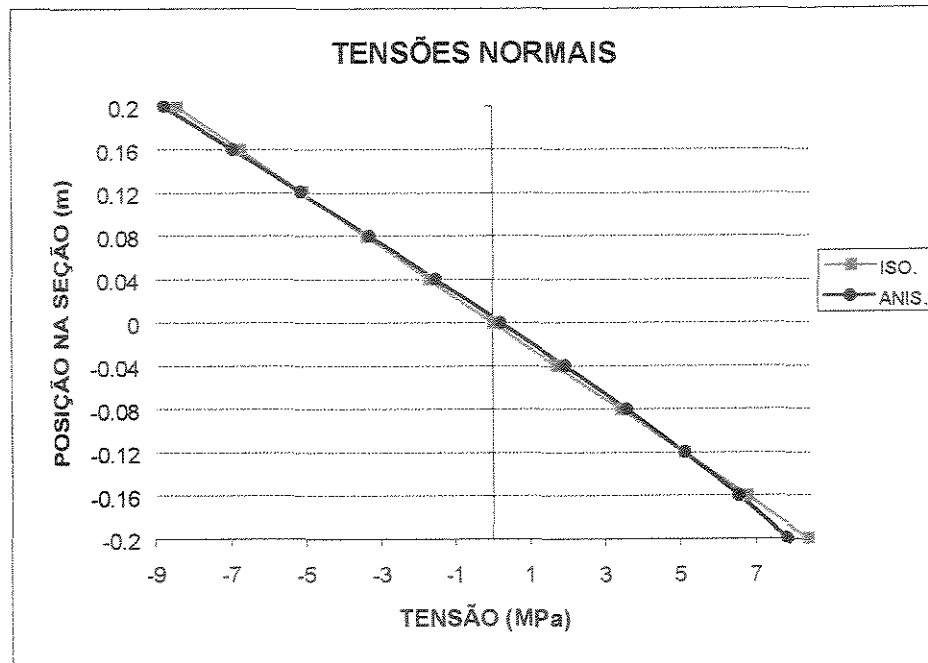


FIGURA 6.12 – Distribuições de tensões normais de uma viga engastada anisotrópica, de madeira espécie **maple**, e de uma viga engastada isotrópica.

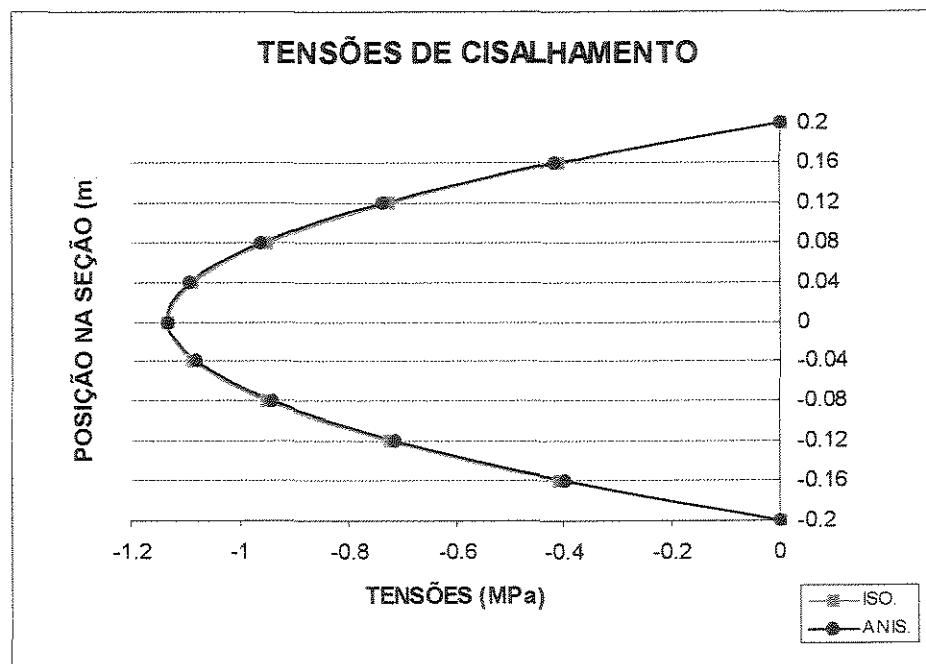


FIGURA 6.13– Distribuições de tensões tangenciais de uma viga engastada anisotrópica, de madeira espécie **maple**, e de uma viga engastada isotrópica.

Através dos gráficos construídos, baseados nas equações apresentadas por LEKHNITSKII et al. (1968), pode-se observar que não houve grandes diferenças entre as vigas anisotrópicas e as isotrópicas no que se concerne à distribuição de tensões tangenciais. Para os deslocamentos e para a distribuição de tensões normais, as diferenças mais significativas foram apresentadas pelas vigas das espécies **ipê** ($\eta_{xy,x} = 1.30$) e **ash** ($\eta_{xy,x} = 0.90$), espécies essas que possuem maiores valores para os coeficientes de influência mútua de 1ª espécie ($\eta_{xy,x}$), e também, para o módulo de elasticidade longitudinal na direção x (E_x).

Em todos os casos, os deslocamentos e as máximas tensões normais das vigas anisotrópicas foram menores que as apresentadas pelas vigas isotrópicas. De uma maneira geral, constatou-se que o aumento da diferença, entre os resultados apresentados pelos dois tipos de vigas, é proporcional aos valores para o coeficiente de influência mútua de 1ª espécie e para o módulo de elasticidade longitudinal, que dependem de cada material, e também, proporcional à esbeltez da seção transversal da viga.

Por outro lado, quanto menor for o comprimento do vão, maior a influência do cisalhamento nos deslocamentos e assim, maior a diferença entre os deslocamentos da linha elástica dos dois tipos de vigas.

6.2 Caso 2: Viga Bi-Apoiada

Utilizando-se dos dados da geometria da viga do item anterior, e considerando-se as mesmas espécies de madeiras, pode-se também obter gráficos comparativos entre uma viga bi-apoiada anisotrópica (Figura 6.14) e uma isotrópica. Analisando-se somente as tensões normais e os deslocamentos, têm-se:

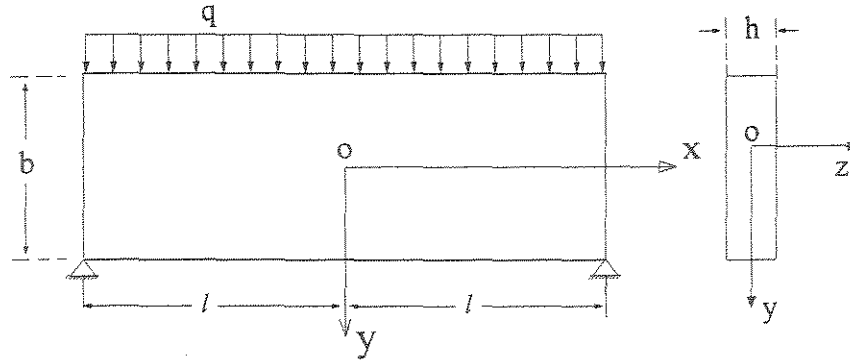


FIGURA 6.14— Viga bi-apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

Tensões normais:

$$\sigma_x = \frac{qy}{2I}(l^2 - x^2) + \frac{q}{h} \left[-\eta_{xy,x} \frac{x}{b} \left(1 - \frac{12y^2}{b^2} \right) + 2 \left(\left(-\frac{v_{xy}}{2} + \frac{E_x}{4G_{xy}} \right) - \eta_{xy,x}^2 \right) \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b} \right) \right] \quad (6.12)$$

Equação para a linha elástica:

$$v = \frac{q}{24E_x I} (x^4 - 6l^2 x^2 + 5l^4) + \frac{qb^2}{80I} \left(-3 \frac{v_{xy}}{E_x} + 4 \cdot \frac{1}{G_{xy}} - \frac{32}{3} \cdot \frac{\eta_{xy,x}^2}{E_x} \right) (l^2 - x^2) \quad (6.13)$$

Para as vigas constituídas de madeira da espécie **guapuruvú**, têm-se:

Tensões normais (na seção $x = 0$):

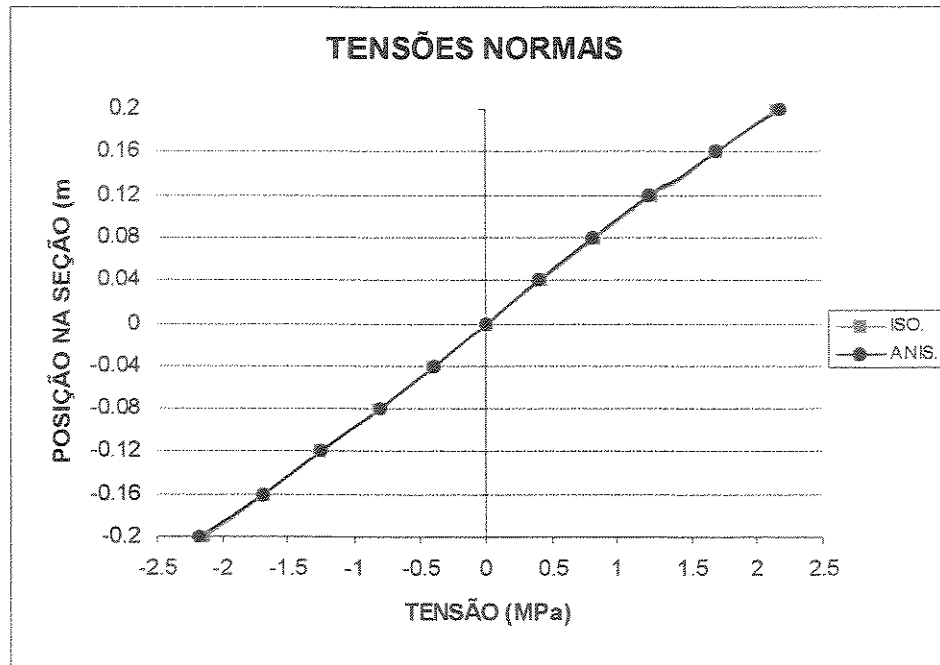


FIGURA 6.15– Distribuições de tensões normais de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie guapuruvú, e de uma isotrópica.

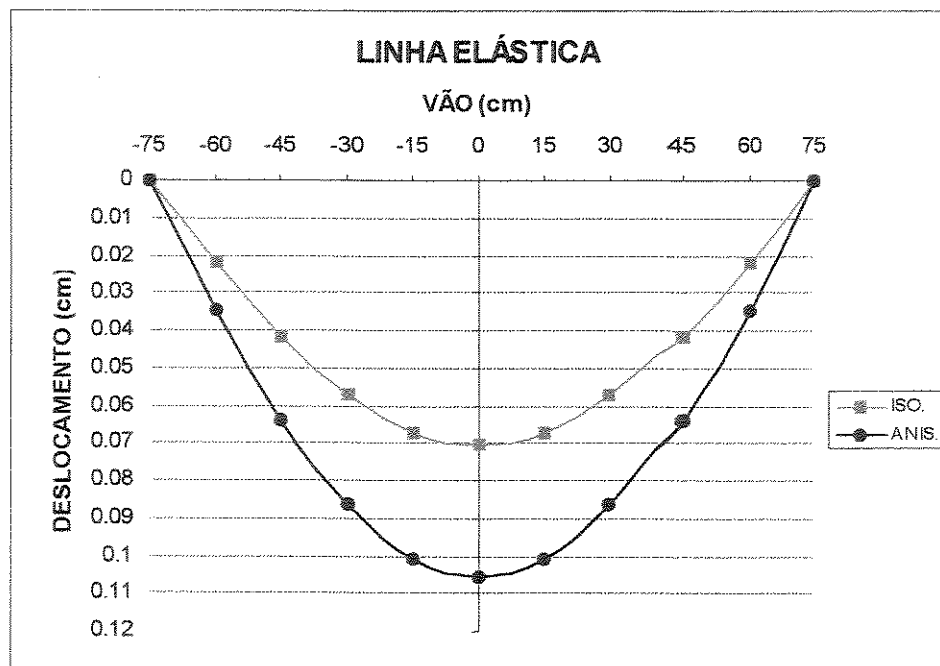


FIGURA 6.16– Deslocamentos de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie guapuruvú, e de uma isotrópica.

Para a espécie **ipê**:

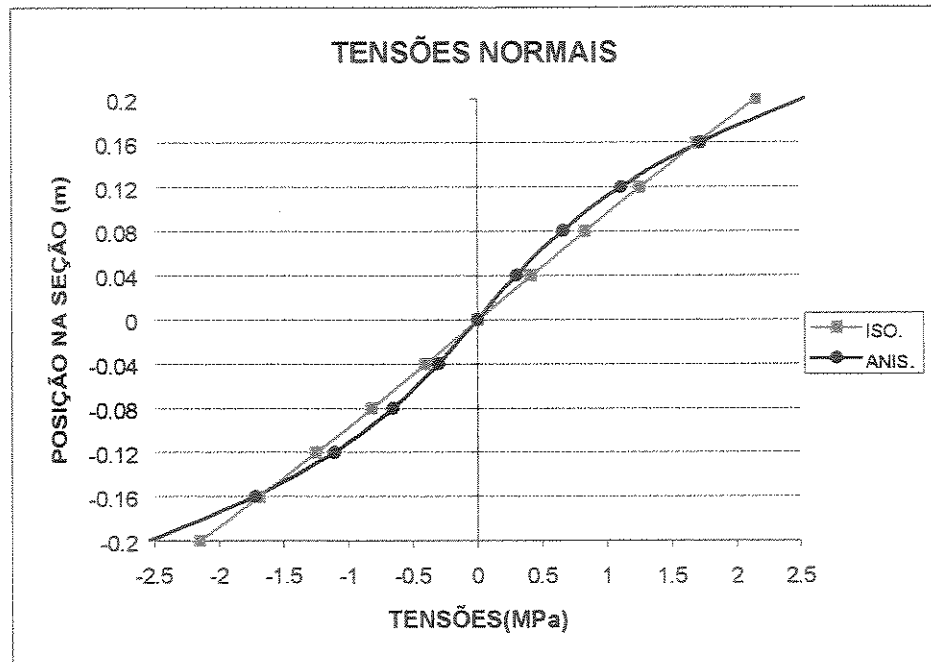


FIGURA 6.17– Distribuições de tensões normais de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie **ipê**, e de uma isotrópica.

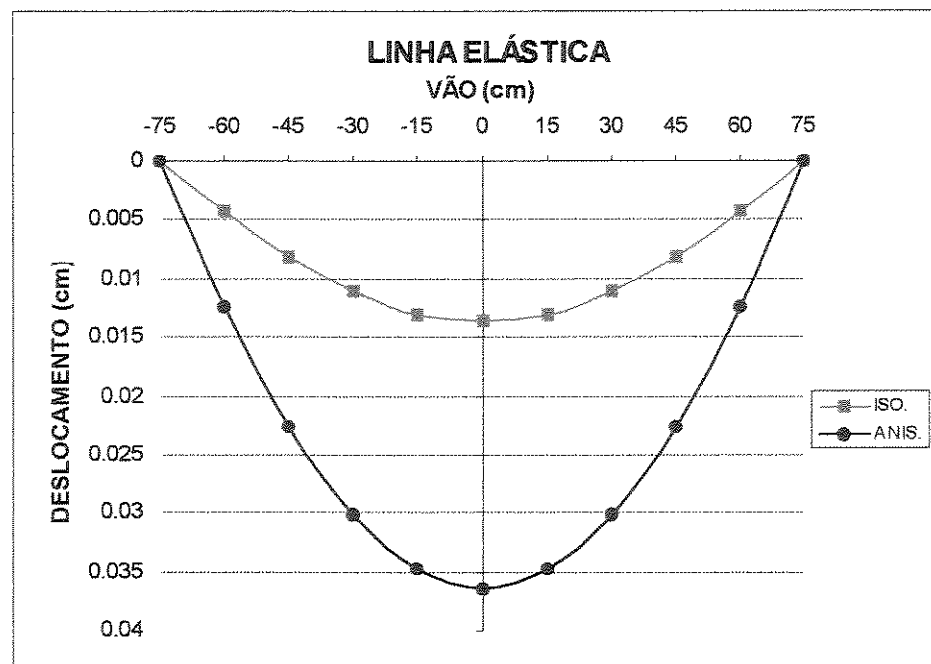


FIGURA 6.18– Deslocamentos de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie **ipê**, e de uma isotrópica.

Para a espécie **ash**:

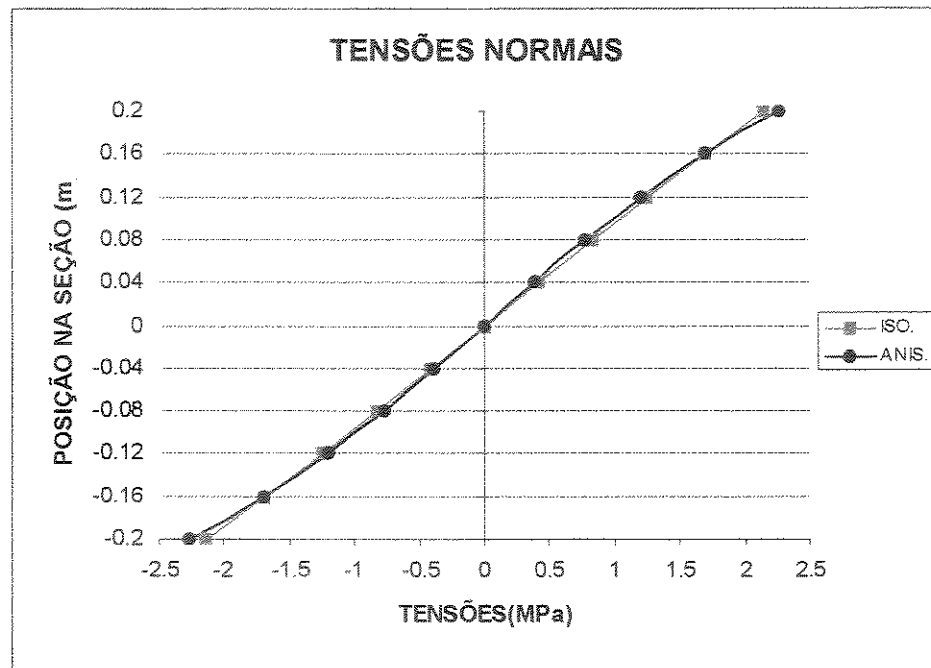


FIGURA 6.19– Distribuições de tensões normais de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie **ash**, e de uma isotrópica.

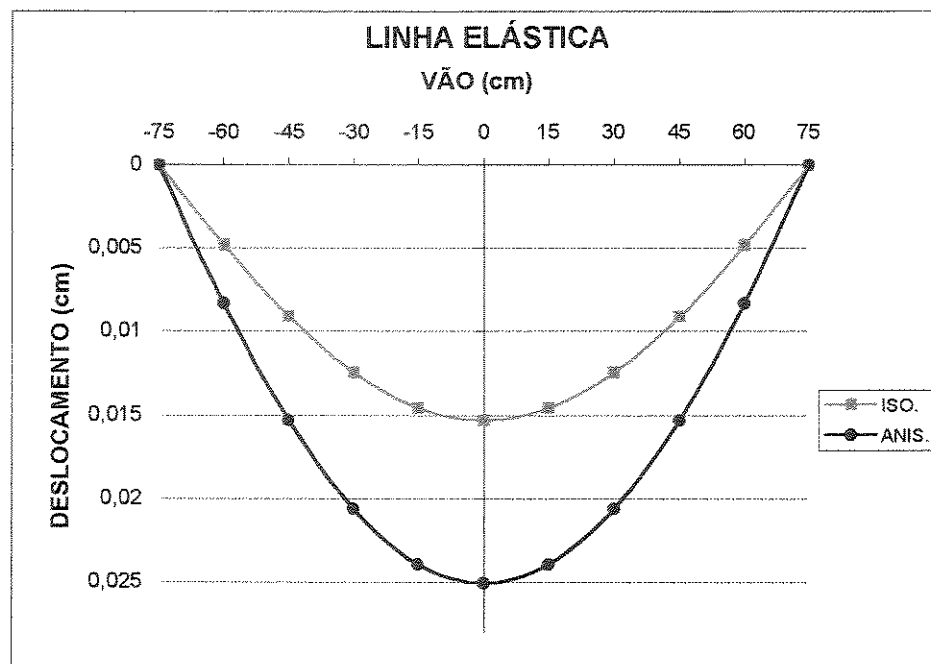


FIGURA 6.20– Deslocamentos de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie **ash**, e de uma isotrópica.

Para as vigas da espécie **maple**:

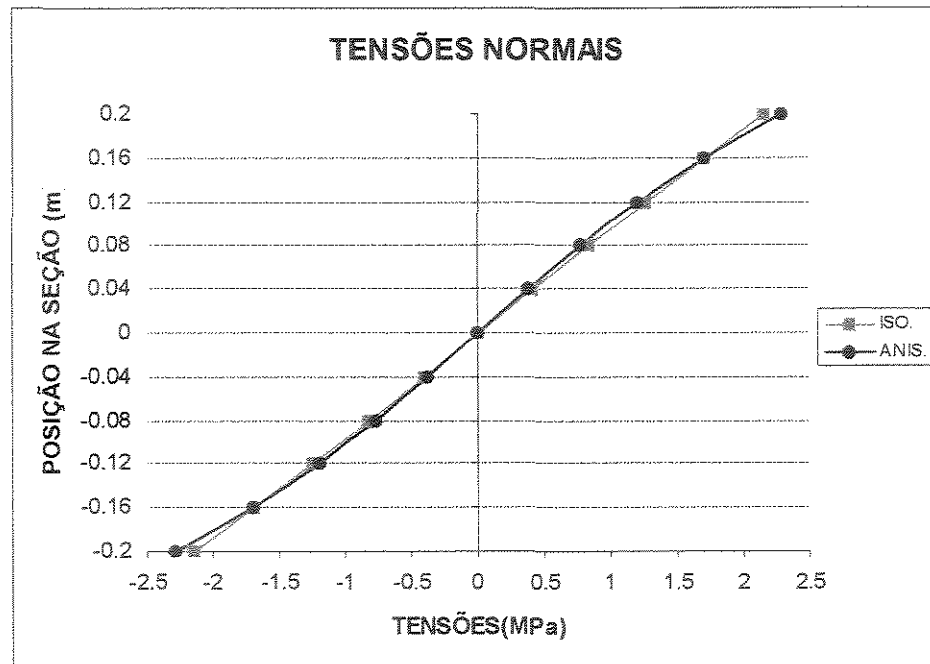


FIGURA 6.21– Distribuições de tensões normais de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie **maple**, e de uma isotrópica.

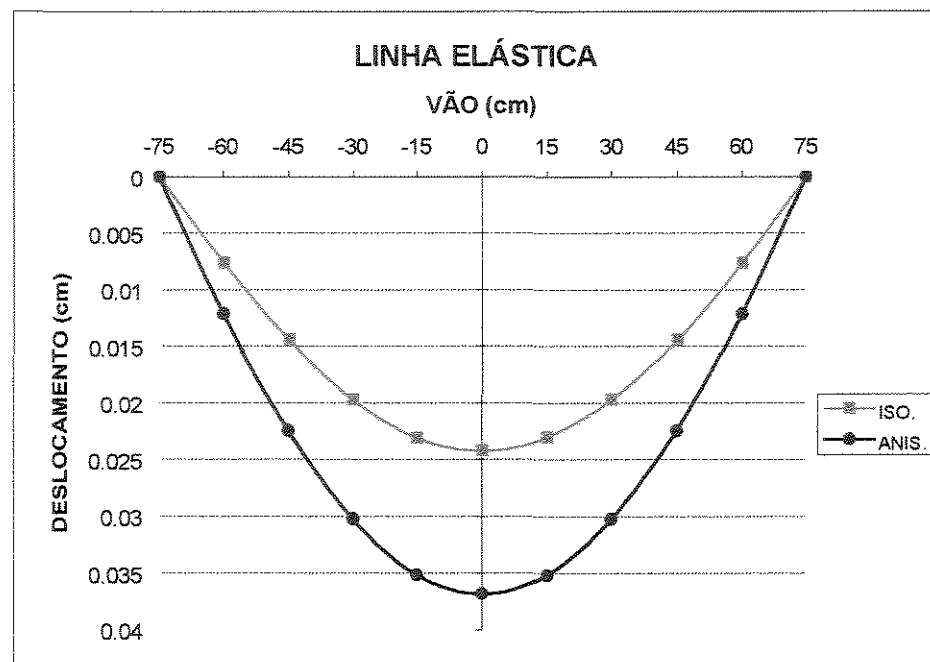


FIGURA 6.22– Deslocamentos de uma viga bi-apoiada anisotrópica de madeira, espécie **maple**, e de uma isotrópica.

Analisando-se os gráficos apresentados, observa-se que as mesmas considerações feitas para as vigas engastadas podem ser aplicadas para as bi-apoiadas, com exceção dos deslocamentos, que são maiores para as vigas anisotrópicas bi-apoiadas do que para as isotrópicas.

Porém, deve-se salientar que os gráficos são construídos baseando-se na formulação obtida por LEKHNITSKII et al. (1968), ou seja, o fato dos deslocamentos para as vigas anisotrópicas bi-apoiadas serem maiores do que os apresentados pelas isotrópicas, deve-se à soma da parcela de deslocamentos referente a anisotropia na equação da linha elástica da viga isotrópica, compondo-se assim a equação (6.13).

7 ANÁLISE COMPARATIVA DOS EXEMPLOS DE HASHIN (1967)

Com a finalidade de se analisar completamente as soluções obtidas por HASHIN (1967) no estudo das tensões e das deformações de vigas anisotrópicas, são elaborados neste capítulo alguns gráficos comparativos de tensões, semelhantes aos desenvolvidos no capítulo 6 para os resultados de LEKHNITSKII et al. (1968). Como exemplo de material anisotrópico que compõe as vigas analisadas, adota-se duas das espécies de madeiras utilizadas no capítulo 6, a guapuruvú e a ipê.

7.1 Viga Engastada Sujeita a uma Carga Concentrada

Para uma viga engastada, sujeita a uma carga concentrada, conforme Figura 7.1, HASHIN (1967) encontrou as seguintes tensões:

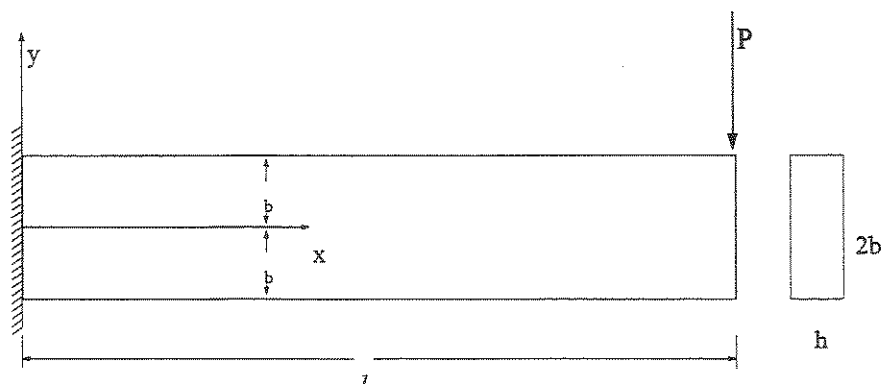


FIGURA 7.1 – Viga engastada sujeita a uma carga concentrada
Fonte: HASHIN (1967).

$$\sigma_{11} = \frac{P}{b} \cdot \frac{S_{1112}}{S_{1111}} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot y^2}{b^2}\right) + \frac{3P \cdot y}{2b^3} \cdot (l - x) \quad (7.1)$$

$$\sigma_{22} = 0 \quad (7.2)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{3P}{4b} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad (7.3)$$

Com o intuito de se comparar as tensões normais, à seção transversal, da viga engastada anisotrópica com as de uma viga isotrópica, é preciso definir ainda valores para as variáveis presentes na equação (7.1). Assim:

- $P = 10 \text{ KN}$; $b = 0.20 \text{ m}$; $l = 2 \text{ m}$;
- $h = 1 \text{ m}$ (considerando-se uma viga de largura unitária);
- seção a ser analisada as tensões: $x = 0$ (seção do engaste).

As constantes do tensor de compliância podem ser escrita como:

$$S_{1111} = \frac{1}{E_x}; \quad S_{1112} = \frac{\eta_{xy,x}}{2 \cdot E_x}; \quad \text{onde :}$$

$\eta_{xy,x} = 0.5364$ para a espécie **guapuruvú** ; e $\eta_{xy,x} = 1.3051$ para a espécie **ipê**.

Considerando-se, primeiramente, como material anisotrópico a madeira da espécie **guapuruvú** e substituindo-se os valores das constantes envolvidas nas equações (7.1) obtém-se:

- tensões normais para a viga anisotrópica:

$$\sigma_{11} = 13.41 \cdot (1 - 75 \cdot y^2) + 3750 \cdot y \quad (7.4)$$

- tensões normais para a viga isotrópica:

$$\sigma_{11} = 3750 \cdot y \quad (7.5)$$

Para a espécie **ipê**:

- tensões normais para a viga anisotrópica:

$$\sigma_{11} = 32.63 \cdot (1 - 75 \cdot y^2) + 3750 \cdot y \quad (7.6)$$

- tensões normais para a viga isotrópica:

$$\sigma_{11} = 3750 \cdot y \quad (7.7)$$

Assim, é possível obter-se o seguinte gráfico:

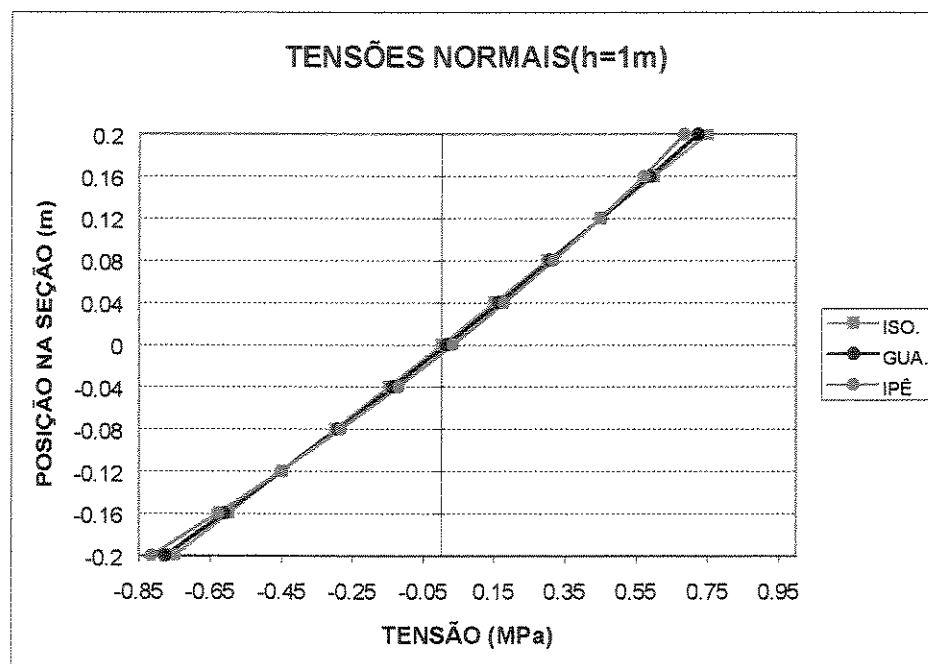


FIGURA 7.2– Distribuições de tensões normais de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira, espécies **guapuruvú** e **ipê**, e de uma isotrópica.

Considerando-se a espessura da viga como sendo de 0.10 m ($h = 0.10\text{m}$), e analisando-se as tensões ainda na seção $x = 0$, têm-se:

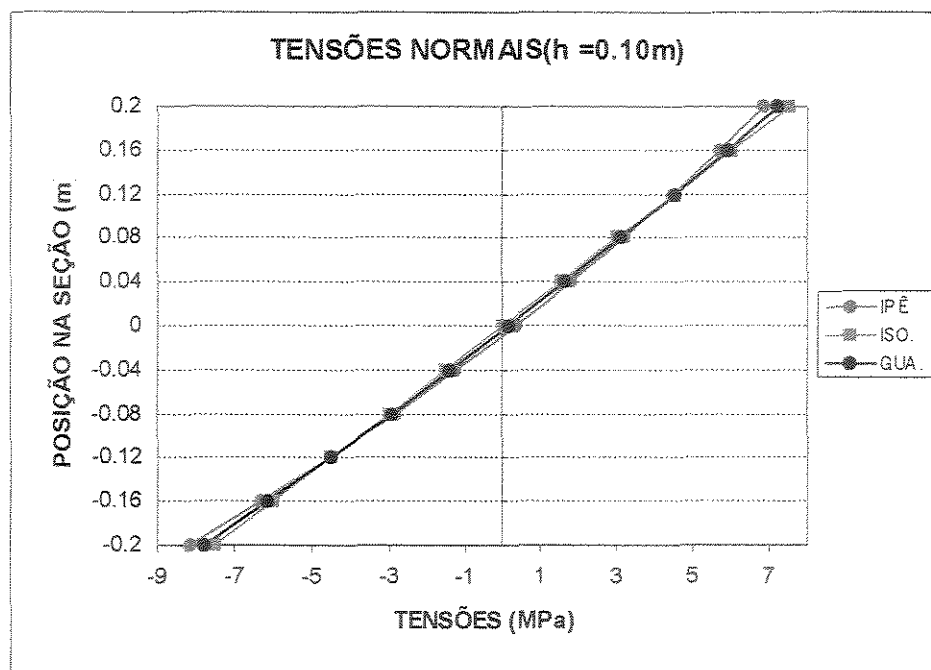


FIGURA 7.3— Distribuições de tensões normais de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies **guapuruvú** e **ipê**, e de uma isotrópica.

Alterando-se agora a seção de análise para $x = 1\text{ m}$, mas, mantendo-se a largura da viga $h = 0.10\text{ m}$, obtém-se:

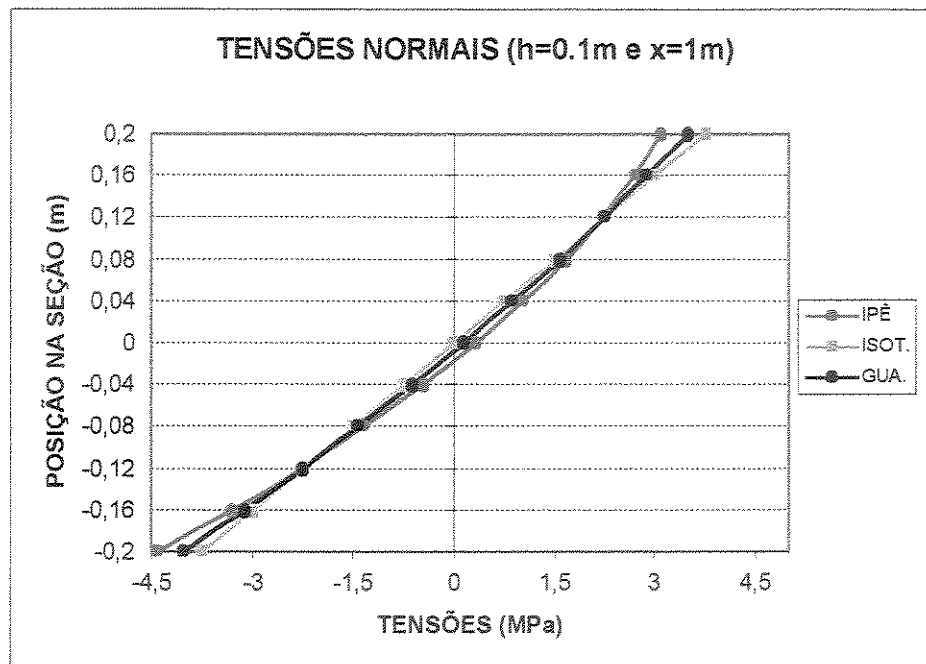


FIGURA 7.4— Distribuições de tensões normais, na seção $x = 1\text{m}$, de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies **guapuruvú** e **ipê**, e de uma isotrópica

E agora para $x = 2\text{ m}$:

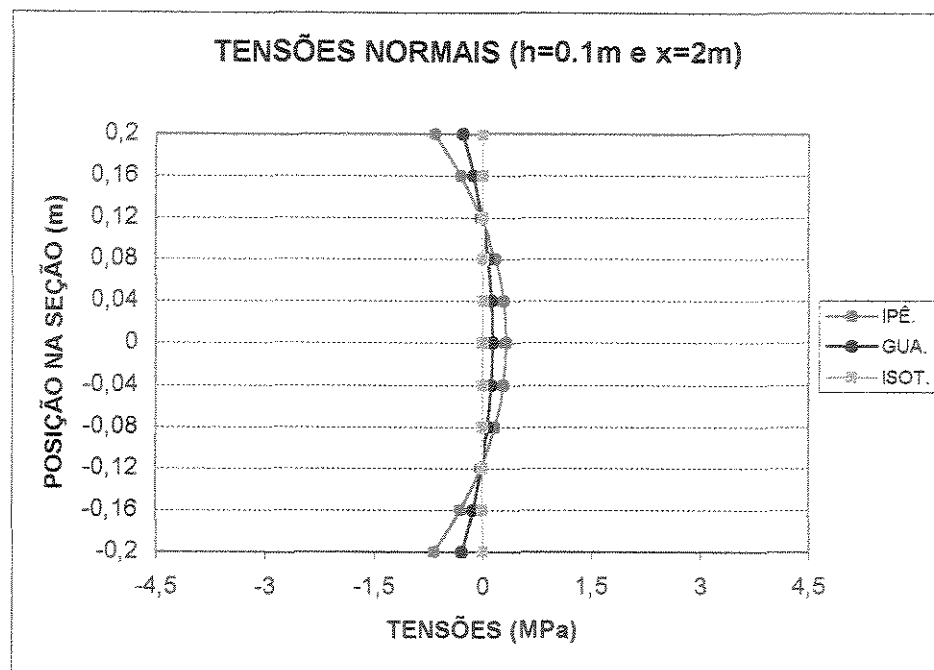


FIGURA 7.5– Distribuições de tensões normais, na extremidade livre $x = 2\text{m}$, de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies **guapuruvú** e **ipê**, e de uma isotrópica.

Observando-se os gráficos apresentados é possível constatar-se novamente a influência da anisotropia sobre as distribuições de tensões normais das duas vigas de madeira. Como nos gráficos construídos para os exemplos de LEKHNITSKII et al. (1968), as vigas de madeira espécie ipê, que possuem o maior valor para o coeficiente de influência de 1ª espécie ($\eta_{xy,x}$), apresentaram maior diferença de comportamento em relação as vigas isotrópicas.

Voltando-se a atenção para a influência da largura da seção (h), sobre essa diferença de comportamento, verificou-se que ela não é tão acentuada como a influência da altura da seção (b) (já comentada no **capítulo 6**). Ao se mudar a largura da seção de $h = 1\text{m}$ para $h = 0.1\text{m}$, as distribuições de tensões normais praticamente não se alteraram. Com relação a posição da seção de análise de tensões, constatou-se que a medida que ela se afasta da seção do engaste (de $x = 0$ para $x = 1\text{m}$), ocorre um pequeno aumento em relação a diferença de comportamento das tensões nos gráficos.

Na extremidade livre, diferente do que foi apresentado pela viga isotrópica, as vigas anisotrópicas ainda apresentam tensões normais. Supõe-se que esse resultado inesperado seja devido ao fato que as seções transversais, das vigas anisotrópicas, não permaneçam planas após a deformação da viga, assim, havendo deformações tangenciais, surgem tensões normais devido a participação do coeficiente de influência mútua de 1ª espécie $\eta_{xy,x}$.

7.2 Viga Bi-Apoiada Sujeita a um Carregamento Distribuído

Neste capítulo, primeiramente são comparadas as tensões normais e de cisalhamento entre duas vigas anisotrópicas bi-apoiadas, que possuem as mesmas características geométricas e de carregamento, constituídas por espécies diferentes de madeiras, e de uma viga isotrópica, com a mesma geometria e sujeita ao mesmo carregamento das bi-apoiadas. A seguir, esses resultados são comparados com os resultados obtidos por LEKHNITSKII et al. (1968) para a mesma viga bi-apoiada.

7.2.1 Análise Comparativa com uma Viga Isotrópica

Para a viga anisotrópica bi-apoiada, representada na Figura 7.6, HASHIN (1967) obteve as seguintes tensões:

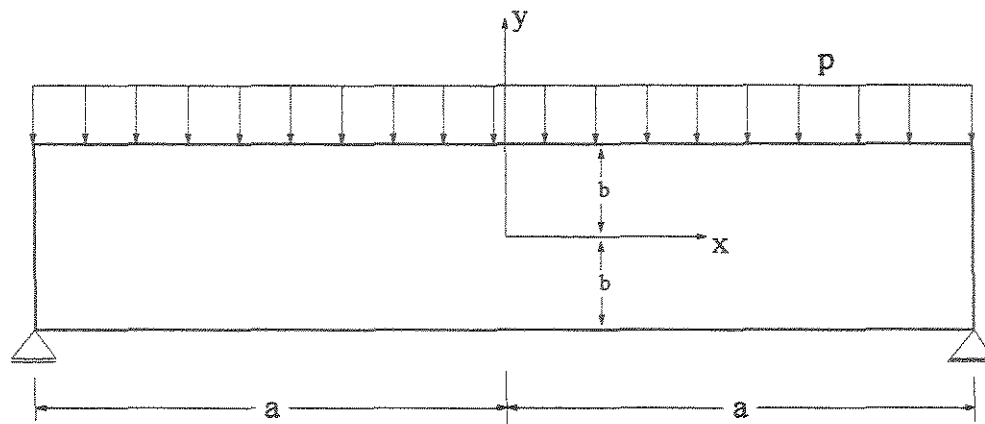


FIGURA 7.6 – Viga bi-apoiada sujeita a um carregamento distribuído.

Fonte: HASHIN (1967).

- tensões normais:

$$\sigma_{11} = \frac{3py}{4hb^3}(x^2 - a^2) + \frac{3p \cdot \eta_{xy,x}}{2b} \cdot \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{3}\right)x + \frac{py}{2hb} \cdot \left[\frac{\eta_{xy,x}^2}{2} - \left(-v_{xy} + \frac{E_x}{2G_{xy}}\right)\right] \cdot \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{3}{5}\right) \quad (7.8)$$

- tensões de cisalhamento:

$$\sigma_{12} = \frac{p}{4b} \left(4 \cdot \frac{\eta_{xy,x}}{2} \cdot y + 3x\right) \cdot \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad (7.9)$$

Utilizando-se das constantes elásticas para as madeiras **guapuruvú** e **ipê** (Tabela 7.1),

TABELA 7.1 – Valores para as constantes elásticas das madeiras guapuruvú e ipê.

ESPÉCIE	E_x (KN/m ²)	G_{xy} (KN/m ²)	ν_{xy}	$\eta_{xy,x}$
Guapuruvú	3.507.500,00	420.800,00	0,4149	0,5364
Ipê	18.043.900,00	620.200,00	0,4345	1.3051

Fonte: MASCIA (1991).

é possível se obter os seguintes gráficos, (para as seções $x = 0$ e $x = 0.75$ m):

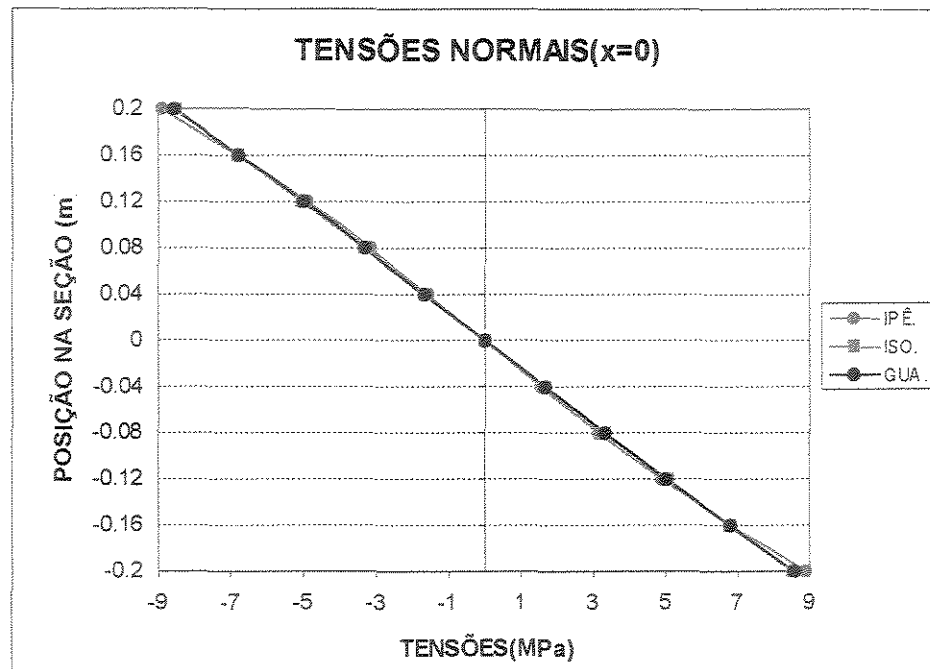


FIGURA 7.7– Distribuições de tensões normais, na seção $x = 0$, de duas vigas bi-apoiadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies **guapuruvú** e **ipê**, e de uma isotrópica.

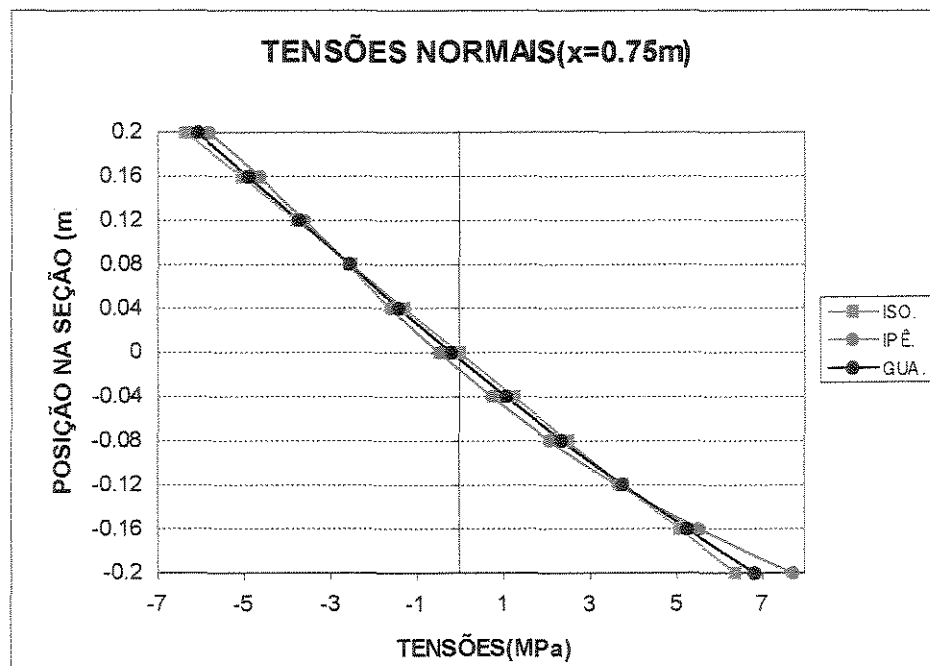


FIGURA 7.8– Distribuições de tensões normais, na seção $x = 0.75\text{m}$, de duas vigas bi-apoiadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies **guapuruvú** e **ipê**, e de uma isotrópica.

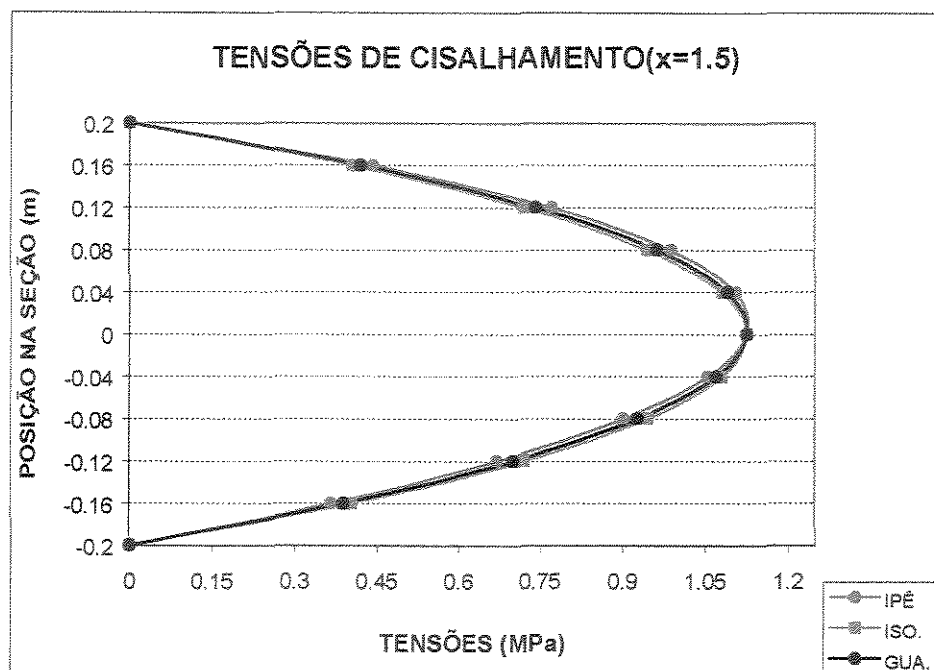


FIGURA 7.9– Distribuições de tensões de cisalhamento, na seção $x = 1.5\text{m}$, de duas vigas bi-apoiadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies **guapuruvú** e **ipê**, e de uma isotrópica.

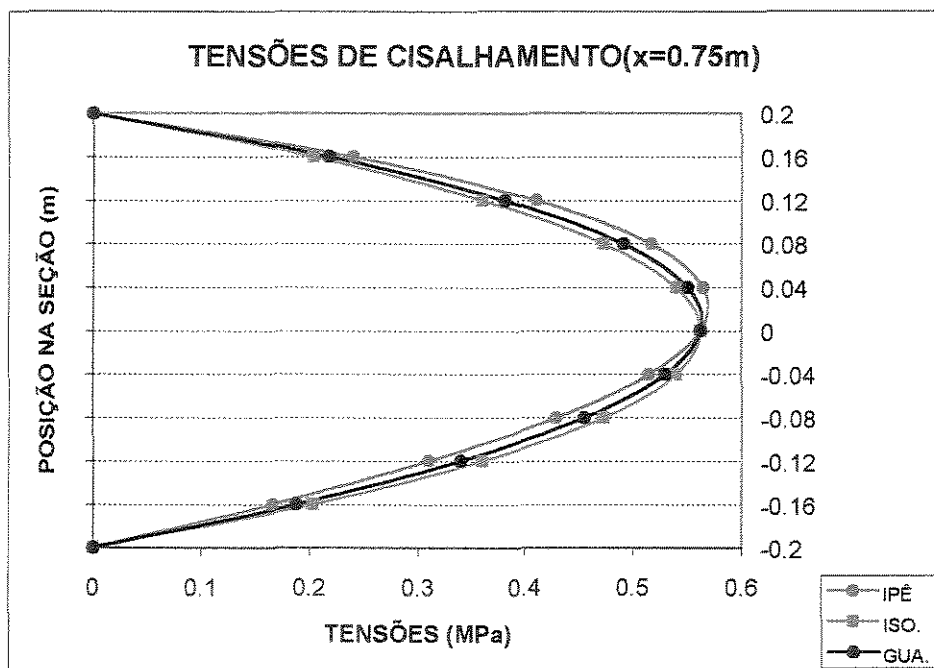


FIGURA 7.10– Distribuições de tensões de cisalhamento, na seção $x = 0.75\text{m}$, de duas vigas bi-apoiadas anisotrópicas de madeira com larguras $h = 0.10\text{m}$, espécies **guapuruvú** e **ipê**, e de uma isotrópica.

Analisando-se os gráficos de tensões normais para a viga bi-apoiada, verifica-se que as mesmas observações feitas para a viga engastada, no que concerne aos valores do coeficiente de influência mútua de 1ª espécie e do módulo de elasticidade longitudinal (E_x), e também à posição da seção de análise (a diferença é que para a viga bi-apoiada a seção $x = 0$ corresponde à seção do meio do vão), podem ser aplicadas para a viga bi-apoiada anisotrópica.

Em relação às tensões de cisalhamento, observa-se que na seção $x = 1.5\text{m}$ (que corresponde a seção dos apoios) a diferença entre as tensões é menos acentuada do que na seção $x = 0.75\text{m}$ (localizada entre o meio do vão e os apoios)

7.2.2 Análise Comparativa com os Resultados de LEKHNITSKII et al.(1968)

Comparando-se os resultados, para as tensões normais, de HASHIN (1967) com os de LEKHNITSKII et al. (1968), é possível obter-se os seguintes gráficos comparativos de tensões, considerando-se apenas a espécie de madeira **ipê** como exemplo de material anisotrópico, para uma viga anisotrópica bi-apoiada (Figura. 7.6), nas seções $x = 0$ e $x = 0.75\text{m}$, respectivamente:

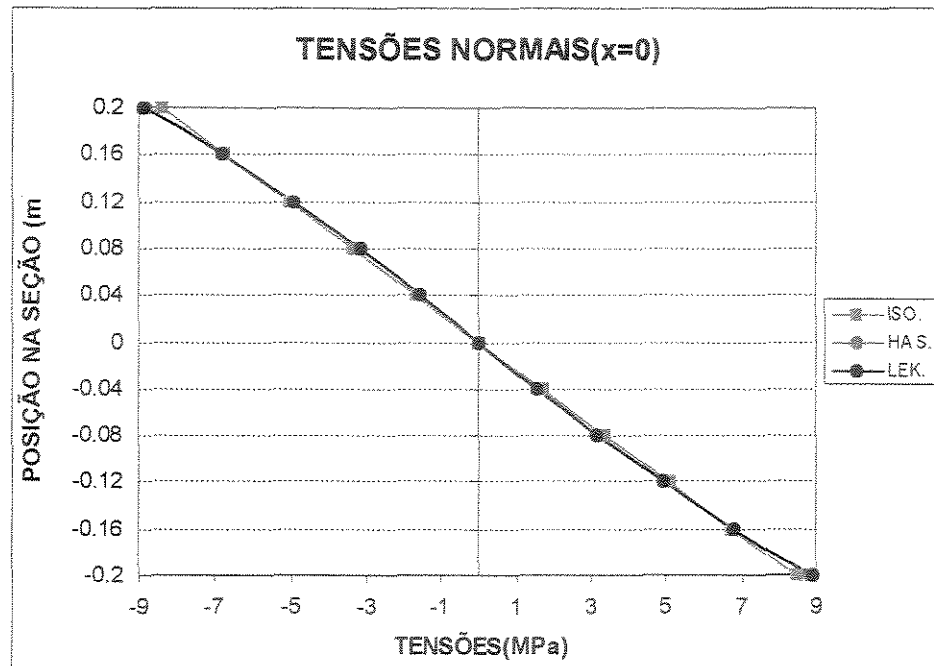


FIGURA 7.11– Gráfico comparativo das distribuições de tensões normais, na seção $x = 0$, obtidas por LEKHNITSKII et al.(1968) e por HASHIN (1967) para uma viga bi-apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

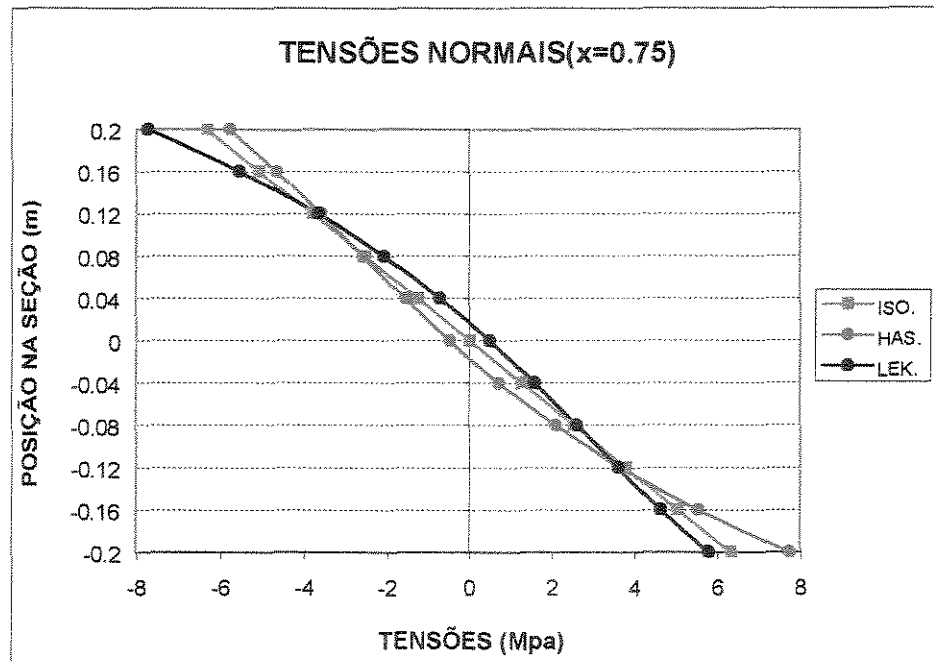


FIGURA 7.12– Gráfico comparativo das distribuições de tensões normais, na seção $x = 0.75m$, obtidas por LEKHNITSKII et al.(1968) e por HASHIN (1967) para uma viga bi-apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

Comparando-se os resultados de LEKHNITSKII et al. (1968) e de HASHIN (1967), através dos gráficos apresentados, é possível se observar que as equações que ambos obtiveram não diferem muito em termos de valores de tensões para a seção de análise no meio do vão ($x = 0$). Porém, ao se distanciar a seção de análise para $x = 0.75m$, as diferenças já são mais significativas, ocorrendo uma inversão de valores máximos de tensões (de tração e de compressão) entre os resultados de ambos pesquisadores.

Considerando-se apenas os recursos analíticos, é difícil chegar-se numa resposta a cerca de qual dos resultados seja o mais correto. Verificando-se as equações de tensões fornecidas pelos pesquisadores, em seus respectivos trabalhos, observa-se que elas satisfazem as equações de equilíbrio de tensões. Além dessa importante constatação, é preciso ainda verificar se as funções de tensão, que deram origem a essas tensões, satisfazem a equação diferencial parcial (4.6).

Infelizmente, os pesquisadores não fornecem em seus trabalhos essas funções de tensão. LEKHNITSKII et al. (1968) apenas comentam que ela tem a forma de um polinômio de 5ª ordem. HASHIN (1967), como já foi comentado, vai um pouco mais além e fornece o método para obtenção dessa função.

Para se ter uma resposta eficiente, em termos práticos, quanto à veracidade das duas equações, seria preciso ainda alguns ensaios de laboratório e, de posse desses dados, efetuar as comparações finais, visando-se chegar na resposta mais precisa.

Porém, mesmo cercados de tantas imprecisões, os resultados obtidos pelos pesquisadores são muito importantes, pois ambos registram as peculiaridades presentes, em termos de tensões, nas vigas anisotrópicas.

8 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE HASHIN (1967) PARA A OBTENÇÃO DE ALGUMAS FUNÇÕES DE TENSÃO

Neste capítulo o método de HASHIN (1967) é aplicado com o objetivo de se estudar a distribuição de tensões de outras vigas anisotrópicas, sujeitas a condições de carregamentos diferentes das apresentadas pelas vigas analisadas em seu artigo. São obtidas as tensões para uma viga engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e para uma viga engastada sujeita a um carregamento triangular. Comparações com resultados obtidos por LEKHNITSKII et al. (1968) e com soluções para vigas isotrópicas também são realizadas.

8.1 Viga Engastada Sujeita a um Carregamento Uniformemente Distribuído

Para a viga engastada, considerada anisotrópica, da Figura 8.1:

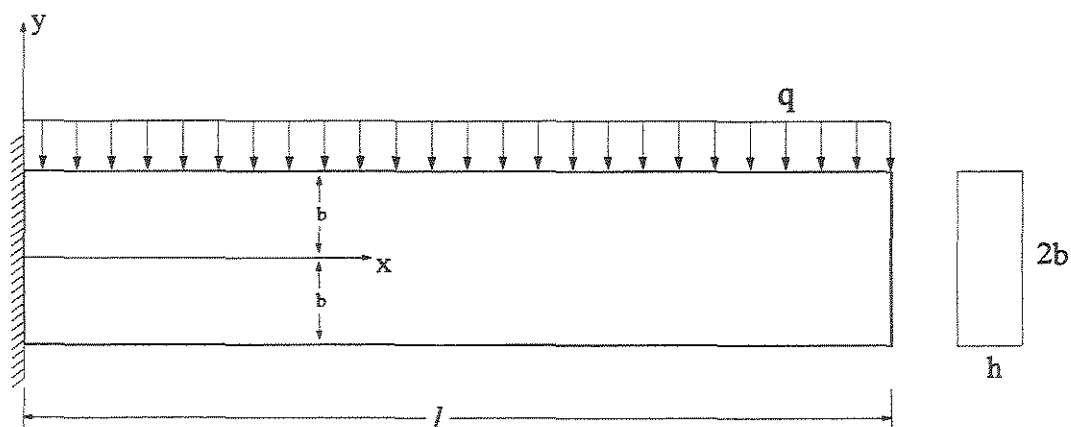


FIGURA 8.1 – Viga engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

têm-se as seguintes condições de contorno:

$$\phi(x, -b) = 0 \quad (8.1 a)$$

$$\frac{\partial \phi(x, -b)}{\partial y} = 0 \quad (8.1 b)$$

$$\phi(x, b) = \frac{q}{2}(l - x)^2 \quad (8.2 a)$$

$$\frac{\partial \phi(x, b)}{\partial y} = 0 \quad (8.2 b)$$

A maior potência de x nas condições de contorno (8.1 – 8.2) é $M = 2$. Assim, $N = M + 3 = 5$, e a função de tensão torna-se:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \sum_{m=0}^{m=2} \sum_{n=0}^{n=5} C_{mn} x^m y^n = \quad m+n \leq 5 \\ &= C_{00} + C_{01}y + C_{02}y^2 + C_{03}y^3 + C_{04}y^4 + C_{05}y^5 + \\ &+ C_{10}x + C_{11}xy + C_{12}xy^2 + C_{13}xy^3 + C_{14}xy^4 + \\ &+ C_{20}x^2 + C_{21}x^2y + C_{22}x^2y^2 + C_{23}x^2y^3 \end{aligned} \quad (8.3)$$

O número de equações necessárias para a determinação dos coeficientes C_{mn} é dado por:

$$S = \frac{1}{2}(M + 1) \cdot (M + 8) = 15 \quad (8.4)$$

Inserindo-se a função de tensão (8.3) nas condições de contorno (8.1-8.2) e equacionando-se coeficientes x de iguais potências:

De 8.1a:

$$C_{00} - C_{01}b + C_{02}b^2 - C_{03}b^3 + C_{04}b^4 - C_{05}b^5 = 0 \quad (8.5a)$$

$$C_{10} - C_{11}b + C_{12}b^2 - C_{13}b^3 + C_{14}b^4 = 0 \quad (8.5b)$$

$$C_{20} - C_{21}b + C_{22}b^2 - C_{23}b^3 = 0 \quad (8.5c)$$

De 8.1b:

$$C_{01} - 2C_{02}b + 3C_{03}b^2 - 4C_{04}b^3 + 5C_{05}b^4 = 0 \quad (8.6a)$$

$$C_{11} - 2C_{12}b + 3C_{13}b^2 - 4C_{14}b^3 = 0 \quad (8.6b)$$

$$C_{21} - 2C_{22}b + 3C_{23}b^2 = 0 \quad (8.6c)$$

De 8.2a:

$$C_{00} + C_{01}b + C_{02}b^2 + C_{03}b^3 + C_{04}b^4 + C_{05}b^5 = -\frac{q}{2}l^2 \quad (8.7a)$$

$$C_{10} + C_{11}b + C_{12}b^2 + C_{13}b^3 + C_{14}b^4 = ql \quad (8.7b)$$

$$C_{20} + C_{21}b + C_{22}b^2 + C_{23}b^3 = -\frac{q}{2} \quad (8.7c)$$

De 8.2b:

$$C_{01} + 2C_{02}b + 3C_{03}b^2 + 4C_{04}b^3 + 5C_{05}b^4 = 0 \quad (8.8a)$$

$$C_{11} + 2C_{12}b + 3C_{13}b^2 + 4C_{14}b^3 = 0 \quad (8.8b)$$

$$C_{21} + 2C_{22}b + 3C_{23}b^2 = 0 \quad (8.8c)$$

As três equações restantes advêm das relações periódicas, respeitando-se a desigualdade $m + n \leq 5$:

Para $m = 2$ e $n = 2$:

$$8(S_{1122} + 2S_{1212})C_{22} - 24S_{1112}C_{13} + 24S_{1111}C_{04} = 0 \quad (8.9)$$

Para $m = 2$ e $n = 3$:

$$24(S_{1122} + 2S_{1212})C_{23} - 96S_{1112}C_{14} + 120S_{1111}C_{05} = 0 \quad (8.10)$$

Para $m = 3$ e $n = 2$:

$$-48S_{1112}C_{23} + 24S_{1111}C_{14} = 0 \quad (8.11)$$

De posse das 15 (quinze) equações é possível resolver um sistema para se encontrar os 15 (quinze) coeficientes desconhecidos C_{mn} , utilizando-se o *software* MATHEMATICA. No **Anexo A**, os resultados fornecidos pelo programa estão mais detalhados.

Substituindo-se os coeficientes obtidos na resolução do sistema de equações, a função de tensão (8.3) torna-se:

$$\phi(x, y) = \frac{-q(b+y)^2 \left(10\alpha_{04}^2 (2b-y)(l-x)^2 - 2\alpha_{13}^2 (b-y)^2 y + \alpha_{04} (b-y)^2 \cdot \right. \\ \left. \cdot (5\alpha_{13}(l-2x) + 2\alpha_{22}y) \right)}{80 \cdot \alpha_{04}^2 \cdot b^3} \quad (8.12)$$

com as constantes α_{ij} possuindo os seguintes valores:

$$\alpha_{04} = S_{1111}; \quad \alpha_{13} = 4 \cdot S_{1112}; \quad \alpha_{22} = S_{1122} + 2 \cdot S_{1212}$$

De posse da função de tensão, é possível se obter as tensões através da função de Airy. Substituindo-se ainda as constantes do tensor de compliância pelas constantes usuais de engenharia:

$$S_{1111} = S_{11} = \frac{1}{E_x}; \quad S_{1122} = S_{12} = \frac{-\nu_{xy}}{E_x}; \quad 2 \cdot S_{1212} = \frac{S_{66}}{2} = \frac{1}{2 \cdot G_{xy}}; \quad S_{1112} = \frac{S_{16}}{2} = \frac{\eta_{xy,x}}{2 \cdot E_x};$$

têm-se as seguintes tensões:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = \frac{q \left[\left(3E_x y + 4G_{xy} \left(-12y \cdot \eta_{xy,x}^2 + 5l \cdot \eta_{xy,x} - 10x \cdot \eta_{xy,x} - \right) \right) b^2 \right]}{40b^3 G_{xy}} + \\ + \frac{q \left[5y \left(2G_{xy} \left(3l^2 - 6xl - 6 \cdot \eta_{xy,x} \cdot yl + 3x^2 + 8 \cdot \eta_{xy,x}^2 \cdot y^2 + \right) + 2 \cdot \nu_{xy} \cdot y^2 + 12 \cdot \eta_{xy,x} \cdot x \cdot y \right) - E_x y^2 \right]}{40b^3 G_{xy}} \quad (8.13)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} = -\frac{q(2b-y)(b+y)^2}{4b^3} \quad (8.14)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{q(3l - 3x - 4 \cdot \eta_{xy,x} \cdot y)(y^2 - b^2)}{4b^3} \quad (8.15)$$

Para um melhor entendimento dos resultados, elaborou-se a seguir alguns gráficos de tensões normais e de cisalhamento, com a finalidade de comparar os resultados obtidos com aqueles fornecidos por LEKHNITSKII et al. (1968) e apresentados no item 6.1. Cabe salientar que as equações obtidas por LEKHNITSKII et al. (1968) foram ajustadas para o sistema de eixos de referência da Figura 8.1.

Observa-se que foram utilizadas duas espécies de madeiras, a **guapuruvú** e a **ipê**, cujos dados de constantes elásticas estão apresentados na Tabela 7.1. Para ambas tensões, normais e de cisalhamento, a seção de análise na viga será $x = 0$. Considerou-se também as vigas com espessura $h = 1$ m.

Primeiramente para a espécie **ipê**, tem-se:

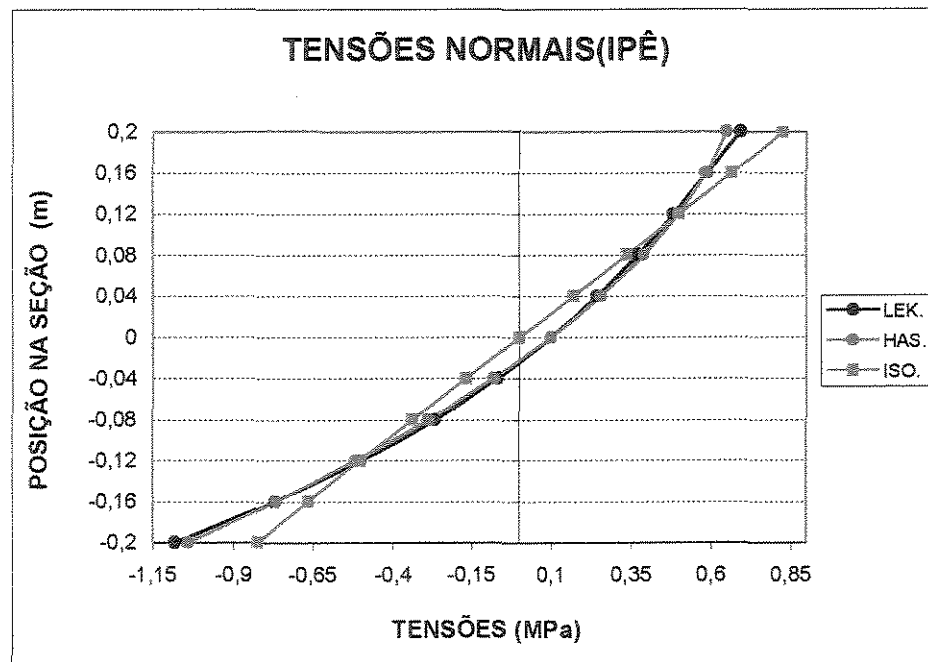


FIGURA 8.2– Distribuições de tensões normais, na seção $x = 0$, de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira, espécie **ipê**, e de uma isotrópica.

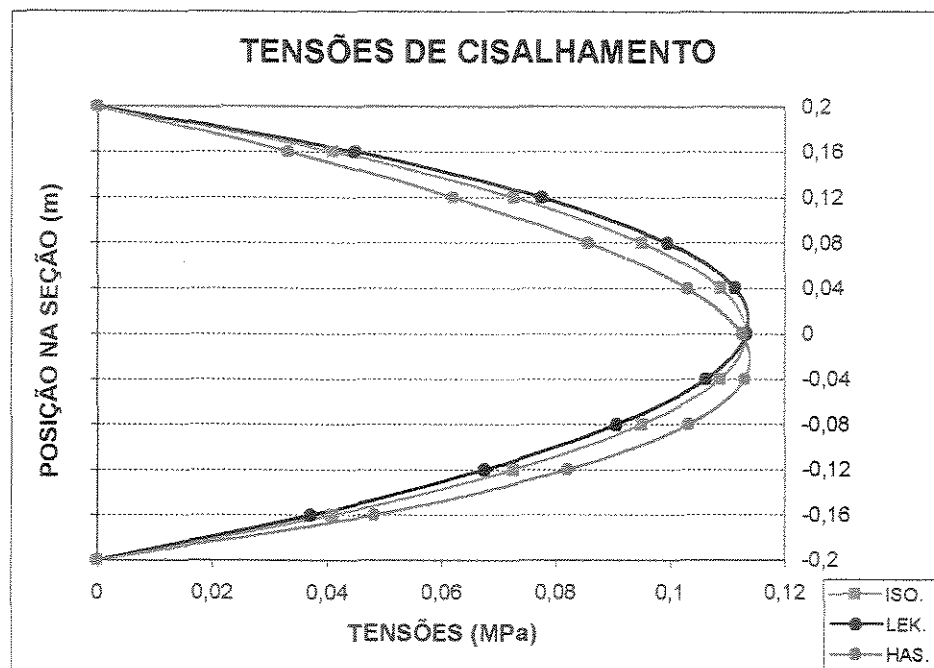


FIGURA 8.3– Distribuições de tensões de cisalhamento, na seção $x = 0$, de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira, espécie **ipê**, e de uma isotrópica.

E para a espécie **guapuruvú**:

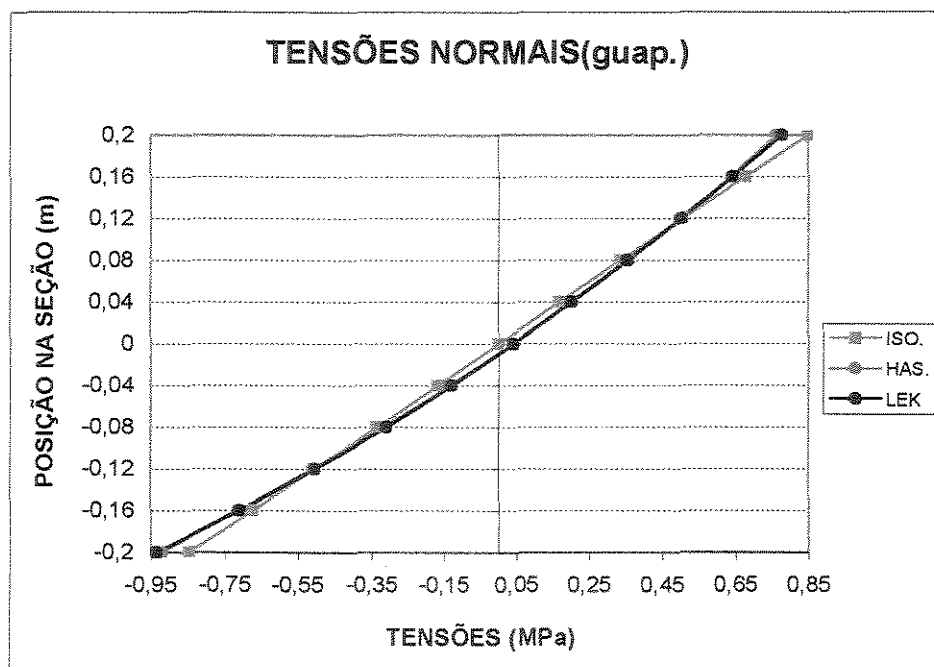


FIGURA 8.4– Distribuições de tensões normais, na seção $x = 0$, de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira, espécie **guapuruvú**, e de uma isotrópica.

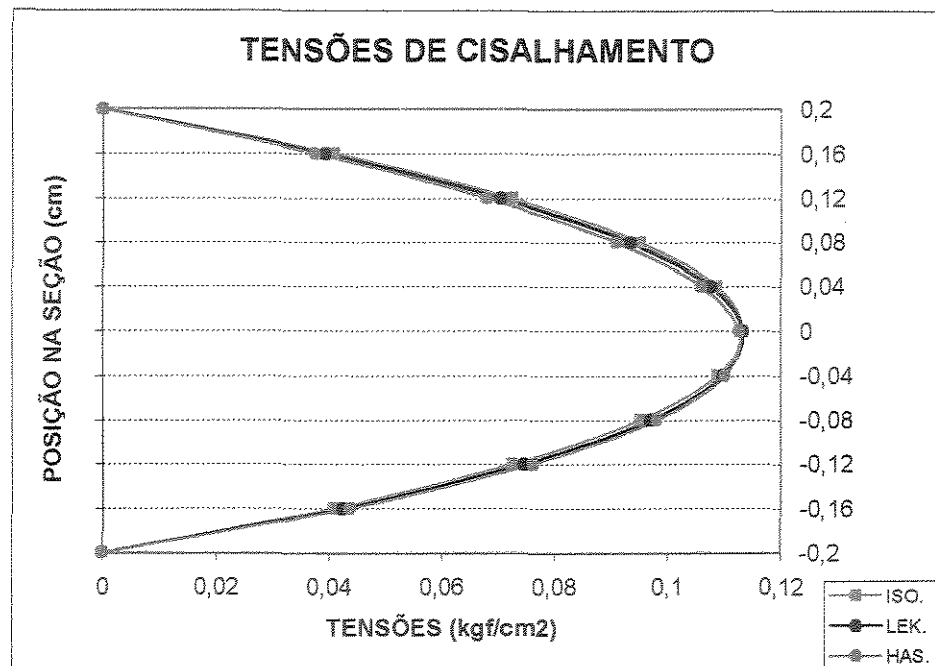


FIGURA 8.5– Distribuições de tensões de cisalhamento, na seção $x = 0$, de duas vigas engastadas anisotrópicas de madeira, espécie **guapuruvú**, e de uma isotrópica.

Dos gráficos apresentados, é possível constatar que as soluções obtidas para a viga engastada anisotrópica, sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, utilizando-se o método polinomial de HASHIN (1967), praticamente não diferem das soluções de LEKHNITSKII et al. (1968) para a mesma viga, o que confirma assim a veracidade dos resultados.

Em comparação com as vigas isotrópicas, os resultados mostram também que as vigas constituídas de madeira espécie **ipê** apresentaram maiores diferenças, tanto para as tensões normais como para as tangenciais. Isso vem a confirmar a participação dos coeficientes de influência mútua nas distribuições de tensões, que na espécie **ipê** é maior do que na **guapuruvú**.

8.2 Viga Engastada Sujeita a um Carregamento Distribuído de Forma Triangular

Neste item, será efetuada a mesma análise que foi realizada com a viga engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

Para a viga engastada, considerada anisotrópica, da Figura 8.6:

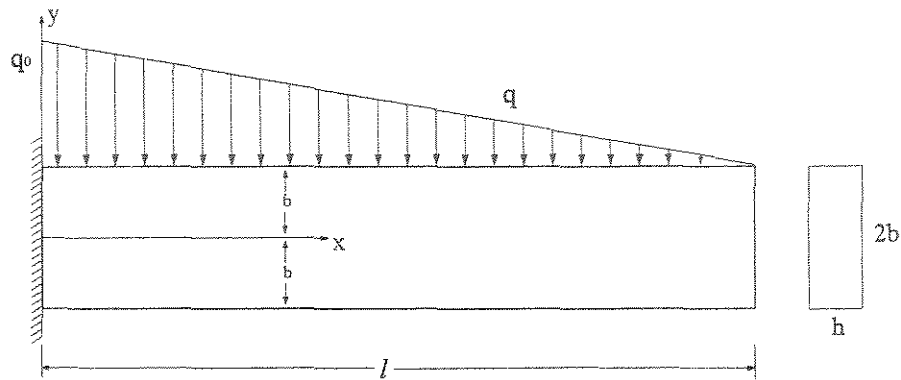


FIGURA 8.6 – Viga engastada sujeita a um carregamento triangular distribuído.

têm-se as seguintes condições de contorno:

$$\phi(x, -b) = 0 \quad (8.16 \text{ a})$$

$$\frac{\partial \phi(x, -b)}{\partial y} = 0 \quad (8.16 \text{ b})$$

$$\phi(x, b) = -\frac{q_0}{6} \left(l^2 - 3lx + 3x^2 - \frac{x^3}{l} \right) \quad (8.17 \text{ a})$$

$$\frac{\partial \phi(x, b)}{\partial y} = 0 \quad (8.17 \text{ b})$$

A equação (8.17 a) corresponde ao momento fletor numa seção transversal genérica da viga engastada da Figura 8.6 e sua dedução está apresentada no **Anexo C**.

A maior potência de x nas condições de contorno (8.16 – 8.17) é $M = 3$. Assim, $N = M + 3 = 6$, e a função de tensão torna-se:

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^6 C_{mn} x^m y^n = \quad m+n \leq 6 \\ &= C_{00} + C_{01}y + C_{02}y^2 + C_{03}y^3 + C_{04}y^4 + C_{05}y^5 + C_{06}y^6 + \\ &+ C_{10}x + C_{11}xy + C_{12}xy^2 + C_{13}xy^3 + C_{14}xy^4 + C_{15}xy^5 + \\ &+ C_{20}x^2 + C_{21}x^2y + C_{22}x^2y^2 + C_{23}x^2y^3 + C_{24}x^2y^4 + \\ &+ C_{30}x^3 + C_{31}x^3y + C_{32}x^3y^2 + C_{33}x^3y^3\end{aligned}\quad (8.18)$$

O número de equações necessárias para a determinação dos coeficientes C_{mn} é dado por:

$$S = \frac{1}{2}(M+1) \cdot (M+8) = 22 \quad (8.19)$$

Inserindo-se a função de tensão (8.18) nas condições de contorno (8.16 - 8.17) e equacionando-se coeficientes x de iguais potências:

De 8.16a:

$$C_{00} - C_{01}b + C_{02}b^2 - C_{03}b^3 + C_{04}b^4 - C_{05}b^5 + C_{06}b^6 = 0 \quad (8.20a)$$

$$C_{10} - C_{11}b + C_{12}b^2 - C_{13}b^3 + C_{14}b^4 - C_{15}b^5 = 0 \quad (8.20b)$$

$$C_{20} - C_{21}b + C_{22}b^2 - C_{23}b^3 + C_{24}b^4 = 0 \quad (8.20c)$$

$$C_{30} - C_{31}b + C_{32}b^2 - C_{33}b^3 = 0 \quad (8.20d)$$

De 8.16b:

$$C_{01} - 2C_{02}b + 3C_{03}b^2 - 4C_{04}b^3 + 5C_{05}b^4 - 6C_{06}b^5 = 0 \quad (8.21a)$$

$$C_{11} - 2C_{12}b + 3C_{13}b^2 - 4C_{14}b^3 + 5C_{15}b^4 = 0 \quad (8.21b)$$

$$C_{21} - 2C_{22}b + 3C_{23}b^2 - 4C_{24}b^3 = 0 \quad (8.21c)$$

$$C_{31} - 2C_{32}b + 3C_{33}b^2 = 0 \quad (8.21d)$$

De 8.17a:

$$C_{00} + C_{01}b + C_{02}b^2 + C_{03}b^3 + C_{04}b^4 + C_{05}b^5 + C_{06}b^6 = -\frac{q_0}{6}l^2 \quad (8.22a)$$

$$C_{10} + C_{11}b + C_{12}b^2 + C_{13}b^3 + C_{14}b^4 + C_{15}b^5 = \frac{q_0}{2}l \quad (8.22b)$$

$$C_{20} + C_{21}b + C_{22}b^2 + C_{23}b^3 - C_{24}b^4 = -\frac{q_0}{2} \quad (8.22c)$$

$$C_{30} + C_{31}b + C_{32}b^2 + C_{33}b^3 = \frac{q_0}{6l} \quad (8.22d)$$

De 8.17b:

$$C_{01} + 2C_{02}b + 3C_{03}b^2 + 4C_{04}b^3 + 5C_{05}b^4 + 6C_{06}b^5 = 0 \quad (8.23a)$$

$$C_{11} + 2C_{12}b + 3C_{13}b^2 + 4C_{14}b^3 + 5C_{15}b^4 = 0 \quad (8.23b)$$

$$C_{21} + 2C_{22}b + 3C_{23}b^2 + 4C_{24}b^3 = 0 \quad (8.23c)$$

$$C_{31} + 2C_{32}b + 3C_{33}b^2 = 0 \quad (8.23d)$$

As seis equações restantes advêm das relações periódicas, respeitando-se a desigualdade $m + n \leq 6$:

Para $m = 2$ e $n = 2$:

$$8(S_{1122} + 2S_{1212})C_{22} - 24S_{2212}C_{31} - 24S_{1112}C_{13} + 24S_{1111}C_{04} = 0 \quad (8.24)$$

Para $m = 2$ e $n = 3$:

$$-48S_{2212}C_{32} + 24(S_{1122} + 2S_{1212})C_{23} - 96S_{1112}C_{14} + 120S_{1111}C_{05} = 0 \quad (8.25)$$

Para $m = 3$ e $n = 2$:

$$24(S_{1122} + 2S_{1212})C_{32} - 48S_{1112}C_{23} + 24S_{1111}C_{14} = 0 \quad (8.26)$$

Para $m = 3$ e $n = 3$:

$$72(S_{1122} + 2S_{1212})C_{33} - 192S_{1112}C_{24} + 120S_{1111}C_{15} = 0 \quad (8.27)$$

Para $m = 2$ e $n = 4$

$$48(S_{1122} + 2S_{1212})C_{24} - 72S_{2212}C_{33} - 240S_{1112}C_{15} + 360S_{1111}C_{06} = 0 \quad (8.28)$$

Para $m = 4$ e $n = 2$

$$-72S_{1112}C_{33} + 24S_{1111}C_{24} = 0 \quad (8.29)$$

De posse das 22 (vinte e duas) equações é possível resolver um sistema para se encontrar os 22 (vinte e dois) coeficientes desconhecidos C_{mn} , utilizando-se o *software* MATHEMATICA.

Diferente do que foi apresentado para a viga engastada do exemplo anterior, a qual estava submetida a um carregamento uniformemente distribuído, ou seja, a um carregamento constante, os resultados obtidos para a viga sujeita a um carregamento triangular, portanto variável em relação ao eixo x , apresentam uma complexidade maior.

LEKHNITSKII et al. (1968), por exemplo, comentam sobre a dificuldade de se trabalhar analiticamente com esse problema, e assim, tratam apenas de um exemplo onde uma viga ortotrópica está sujeita a um carregamento triangular.

Devido a essa complexidade analítica do problema, a manipulação dos coeficientes C_{mn} , e a sua conseqüente substituição na função de tensão (8.18), bem como a obtenção das tensões através das derivações da função de Airy, foram realizadas com o auxílio do *software* MATHEMATICA. Os resultados constam no **Anexo B**, e a seguir, apresenta-se alguns gráficos de tensões, construídos a partir desses resultados obtidos. O material anisotrópico considerado é novamente a madeira da espécie **ipê**, cujas constantes elásticas são mostradas na Tabela 7.1.

Os dados da viga e do carregamento são:

$$q = 20\text{KN/m}; \quad b = 0.20\text{m}; \quad l = 1.50\text{ m}; \quad h = 1\text{m}$$

Para as tensões normais, na seção $x = 0$ têm-se:

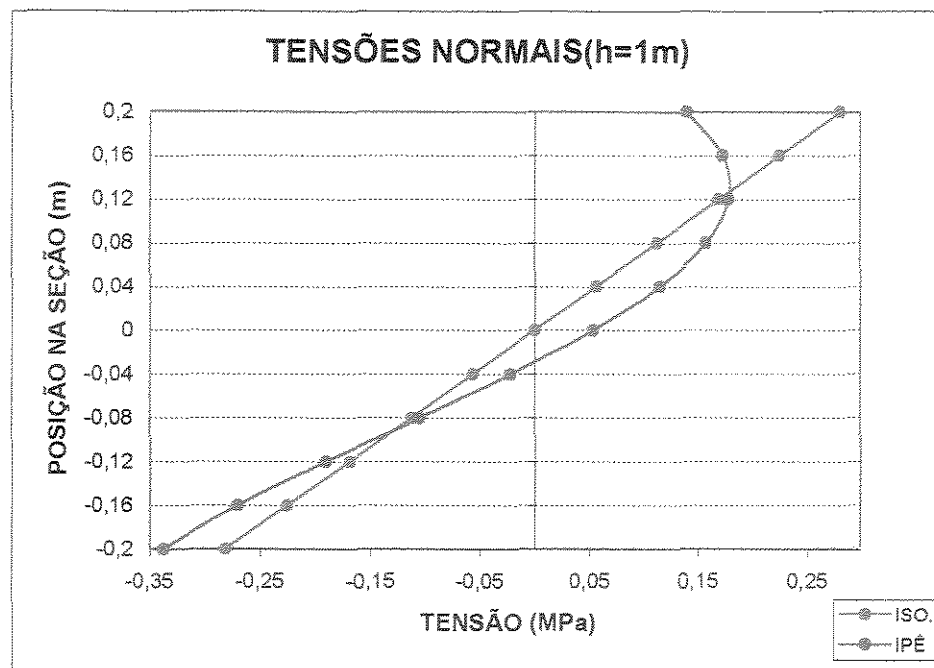


FIGURA 8.7– Distribuições de tensões normais, na seção $x = 0$, de duas vigas engastadas, uma anisotrópica e outra isotrópica.

Para as tensões de cisalhamento:

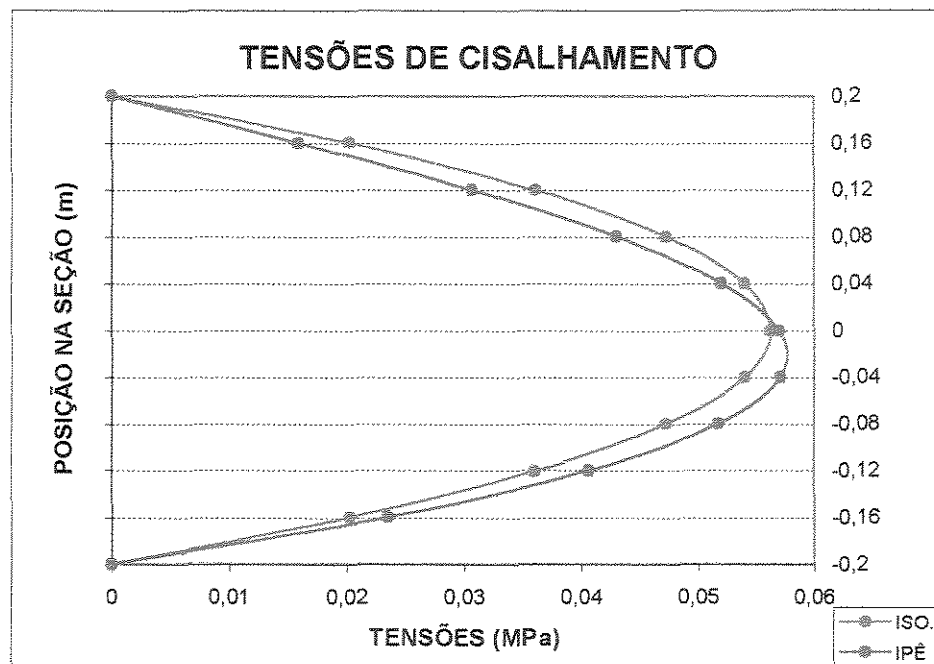


FIGURA 8.8– Distribuições de tensões de cisalhamento, na seção $x = 0$, de duas vigas engastadas, uma anisotrópica e outra isotrópica.

Considerando-se agora a seção $x = 1.50\text{m}$ (extremidade livre) como seção de análise:

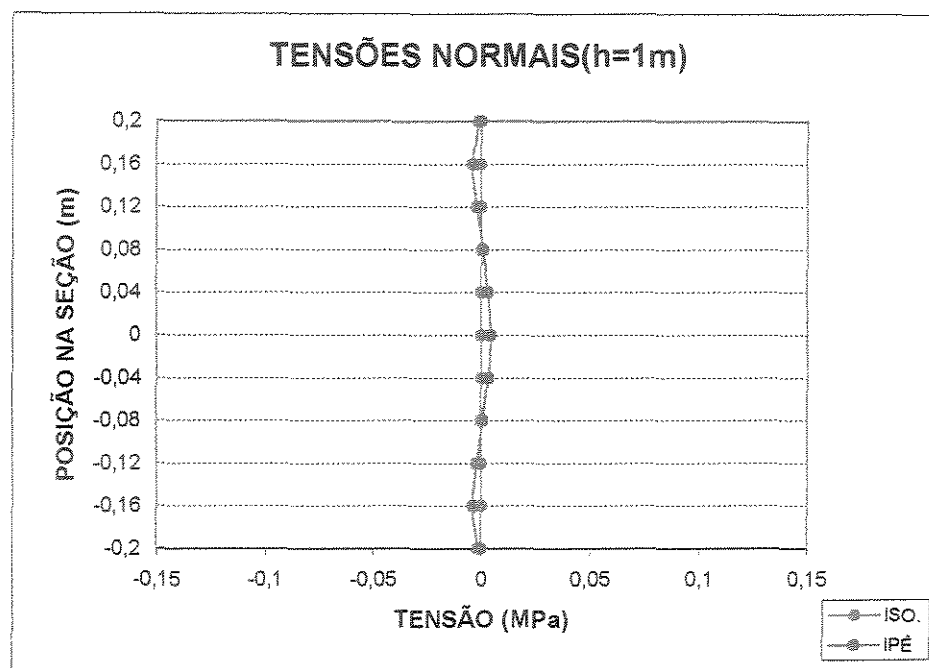


FIGURA 8.9– Distribuições de tensões normais, na seção $x = 1.50\text{m}$, de duas vigas engastadas, uma anisotrópica e outra isotrópica.

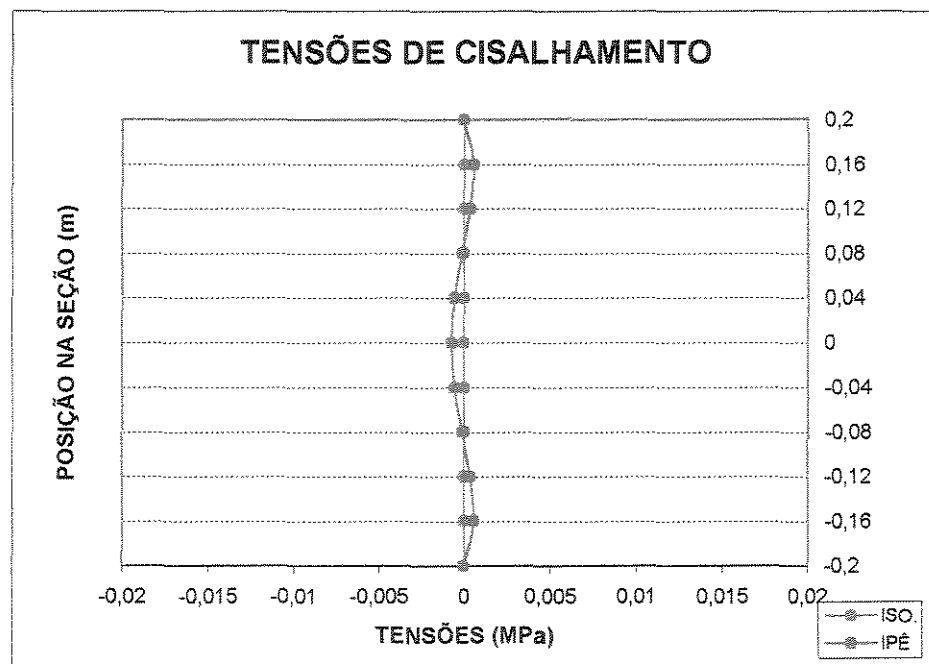


FIGURA 8.10– Distribuições de tensões de cisalhamento, na seção $x = 1.50\text{m}$, de duas vigas engastadas, uma anisotrópica e outra isotrópica.

Considerando-se os resultados apresentados para as distribuições de tensões normais e de cisalhamento, constata-se que houve maiores diferenças em relação à viga isotrópica, do que para o exemplo onde se analisou a viga sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

A razão para esse aumento de diferença pode ser apontada devido ao carregamento variável (triangular) e também a participação do coeficiente de influência mútua $\eta_{yz,y}$, que aparece na função de tensão obtida para esse exemplo (a função está apresentada no **Anexo B**), e que quantifica a influência de tensões tangenciais no plano yz em deformações normais na direção y .

Outro resultado observado é o fato de que na extremidade livre ainda se concentram tensões normais e de cisalhamento. Como já foi comentado no item 7.1, isso se deve à presença dos coeficientes de influência mútua nas equações.

9 ESTUDO DOS SISTEMAS COMPÓSITOS EM CAMADAS

Sistemas compósitos em camadas, especialmente madeiras laminadas, vem tendo, ultimamente, seu uso incrementado na engenharia de estruturas. Devido a isso, as pesquisas na área de materiais compósitos têm sido bastante intensas nas últimas décadas, fato esse decorrente da necessidade, cada vez maior, de se obter materiais com propriedades de alta rigidez e resistência em direções definidas, bem como, de diminuição dos custos de fabricação desses sistemas.

Material compósito, ou conjugado, é um termo geral usado para designar um conjunto de materiais heterogêneos associados para realizarem uma função que os materiais isoladamente não poderiam exercer (BONES, 1995).

A madeira, por si só, é um material orgânico composto de cadeias de celulose embebidas numa matriz de lignina, possuindo propriedades mecânicas direcionais. As cadeias de celulose constituem macroscopicamente fibras de orientação definida, cuja coesão provém da lignina que é amorfa e faz o papel de matriz. Quanto maior for a proporção de lignina, maior será a resiliência do conjunto, que se torna mais elástico, sendo que as propriedades de rigidez e resistência da madeira provém da união das suas fibras trabalhando conjugadamente numa matriz aglutinante (BONES, 1995).

De acordo com BODIG & JAYNE (1982), na sua forma natural, a madeira pode ter sua capacidade de suporte diminuída pela presença de defeitos, como por exemplo nós. Deste modo, a laminação entra como uma solução para um melhor aproveitamento deste material. Na Figura 9.1 estão mostradas algumas formas de reorganização da madeira e seus derivados.

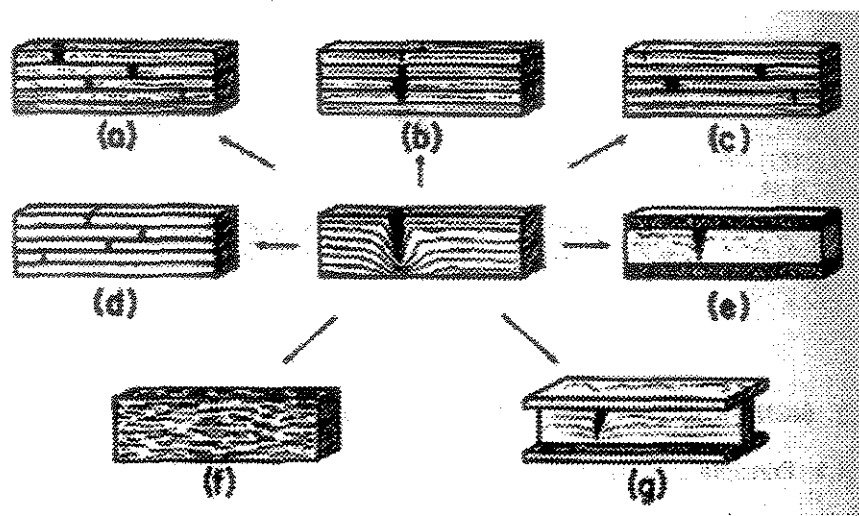


FIGURA 9.1: Formas de reorganização da madeira e seus derivados.

Fonte: BODIG & JAYNE (1982).

Neste contexto, nota-se a importância de se estudar os sistemas de camadas, com o intuito de se entender seu comportamento e assim, contribuir para o aumento de suas aplicações. Assim, apresenta-se neste capítulo, um estudo sobre os sistemas de camadas em madeira laminada, dando-se ênfase a aplicação das funções de tensão na análise das distribuições de tensões nesses sistemas quando eles são submetidos à flexão.

9.1 Método de Análise Considerando-se a Função de Airy

De acordo com CARRASCO (1989) o cálculo de peças estruturais de madeira laminada colada (MLC) era normalmente baseado em resultados aproximados, determinados através de teorias elementares. Os primeiros estudos mais exatos foram desenvolvidos a partir de investigações do comportamento mecânico de vigas laminadas compostas de três camadas simétricas em relação ao centro de gravidade.

Na elasticidade plana, a função de tensão de Airy tem sido extensivamente usada para a solução de problemas de vigas de várias configurações geométricas e condições de carregamento.

Tratando-se de vigas de multi-camadas, a função de tensão de Airy é determinada em cada camada usando-se as condições de contorno e de continuidade separadamente. As condições expressam o fato de que as tensões e os deslocamentos satisfazem certas exigências prescritas ao longo dos contornos ou das interfaces do corpo compósito.

RAO & GHOSH (1979) realizaram uma análise teórica exata de uma viga laminada, submetida a um estado plano de tensões, por meio de métodos elásticos. Consideraram as lâminas da viga como sendo ortotrópicas e a solução é obtida através das funções de Airy, escolhidas por meio de um método apresentado por SILVERMAN (1964) para soluções de vigas ortotrópicas sujeitas a cargas polinomiais.

GDOUTOS & KATTIS (1982) formularam as tensões e as condições de continuidade de deslocamentos para a interface entre camadas anisotrópicas coladas, de diferentes propriedades elásticas, por meio da correspondente função de Airy para as camadas. Dois exemplos são apresentados, nominalmente, uma viga engastada submetida a uma carga concentrada e a um momento fletor, e uma viga bi-apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

FOSCHI & FOX (1970), estudando vigas laminadas curvas de madeira, sujeitas a tensões de tração na direção perpendicular às fibras das lâminas, utilizaram a função de Airy em coordenadas cilíndricas. As lâminas são consideradas cilindricamente ortotrópicas. BUCKNER & GOPU (1987) estudaram laminados com o objetivo de otimizá-los estruturalmente, reduzindo o volume de madeira. Várias soluções foram apresentadas.

No item seguinte, aborda-se o método de análise de vigas laminadas, sujeitas à flexão, de LEKHNITSKII et al. (1968).

9.2 Método de Análise de LEKHNITSKII et al. (1968)

Segundo LEKHNITSKII et al. (1968) é possível obter-se a distribuição de tensões na flexão para certos casos de solicitação de uma viga composta de um número arbitrário de camadas anisotrópicas, de espessuras uniformes, por meio de uma função de tensão polinomial.

Em seu trabalho, LEKHNITSKII et al. (1968) consideraram o caso de uma viga engastada, composta de um número arbitrário de camadas ortotrópicas, de mesma espessura, mas com diferentes propriedades elásticas. Na extremidade livre, ela é submetida a uma carga P e a um momento fletor M . É necessário se determinar as tensões em cada camada, bem como a equação da linha elástica e a rigidez à flexão.

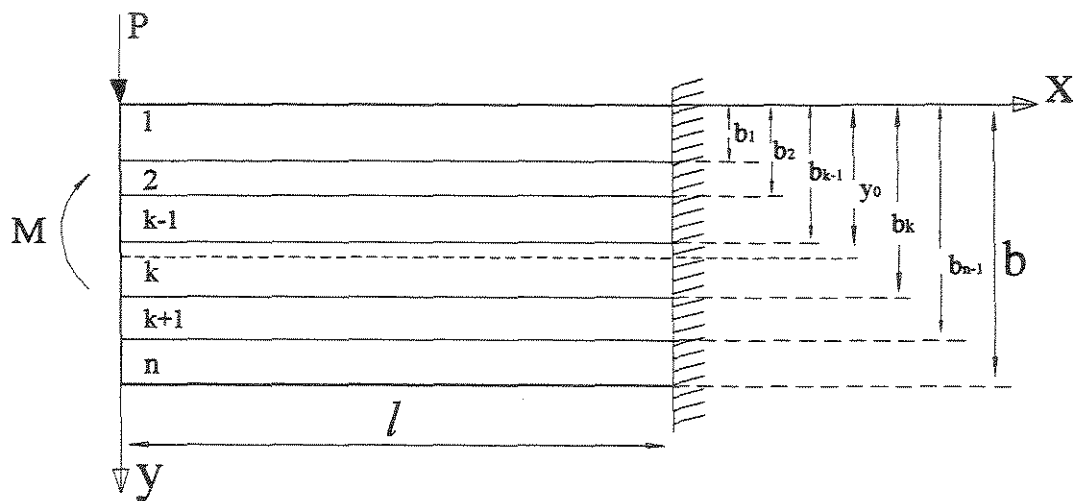


FIGURA 9.2 – Viga laminada engastada, composta de um número arbitrário de camadas.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

Na Figura 9.2, é possível observar que as camadas são numeradas da camada superior para baixo. As seguintes designações são introduzidas:

- n : número de camadas;

- l : comprimento da viga;

- b : altura da viga;

- h : espessura das camadas (a mesma para todas);

- $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_y^{(k)}$, $\tau_{xy}^{(k)}$, u_k , v_k , são as tensões e as componentes do deslocamento em cada camada k ;

- $E_x^{(k)}$, $E_y^{(k)}$, $\nu_{xy}^{(k)}$, $\nu_{yx}^{(k)}$, $G^{(k)}$ são as propriedades elásticas principais para cada camada k ;

- b_{k-1} e b_k são distâncias da face superior da viga até as faces superiores e inferiores de cada camada ($k = 1, 2, \dots, n$; $b_0 = 0$, $b_n = b$).

As componentes de tensão são expressadas para cada camada, individualmente, pela função de Airy:

$$\sigma_x^{(k)} = \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y^2}; \quad \sigma_y^{(k)} = \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy}^{(k)} = -\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x \partial y} \quad (9.1)$$

onde a função ϕ_k satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{1}{E_y^{(k)}} \cdot \frac{\partial^4 \phi_k}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G^{(k)}} - \frac{2\nu_{xy}^{(k)}}{E_x^{(k)}} \right) \cdot \frac{\partial^4 \phi_k}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x^{(k)}} \cdot \frac{\partial^4 \phi_k}{\partial y^4} = 0 \quad (9.2)$$

As componentes de deslocamento são determinadas das equações:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{1}{E_x^{(k)}} \sigma_x^{(k)} - \frac{\nu_{yx}^{(k)}}{E_y^{(k)}} \sigma_y^{(k)} \quad (9.3a)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial y} = -\frac{\nu_{xy}^{(k)}}{E_x^{(k)}} \sigma_x^{(k)} + \frac{1}{E_y^{(k)}} \sigma_y^{(k)} \quad (9.3b)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} = \frac{1}{G^{(k)}} \tau_{xy}^{(k)} \quad (9.3c)$$

As condições de contorno nas bordas superior e inferior são:

$$\begin{aligned} & - \text{em } y = 0 \quad \sigma_y^{(1)} = \tau_{xy}^{(1)} = 0; \\ & - \text{em } y = b \quad \sigma_y^{(n)} = \tau_{xy}^{(n)} = 0; \end{aligned} \quad (9.4)$$

Desde que o deslizamento entre as camadas não é considerado, as condições na superfície de contato são:

$$\begin{aligned} & - \text{em } y = b_{k-1} \quad \sigma_y^{(k-1)} = \sigma_y^{(k)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(k-1)} = \tau_{xy}^{(k)} = 0 \\ & u_{k-1} = u_k, \quad v_{k-1} = v_k \end{aligned} \quad (9.5)$$

As tensões em cada seção transversal equilibrarão a força externa e o momento (o que também ocorre nas seções $x = 0$ e $x = l$). Assim:

$$\sum_{k=1}^n \int_{b_{k-1}}^{b_k} \sigma_x^{(k)} dy = 0, \quad \sum_{k=1}^n \int_{b_{k-1}}^{b_k} \sigma_x^{(k)} \cdot y dy = \frac{M - Px}{h}, \quad \sum_{k=1}^n \int_{b_{k-1}}^{b_k} \tau_{xy}^{(k)} dy = -\frac{p}{h} \quad (9.6)$$

A solução do problema é obtida através de funções de tensão do tipo:

$$\phi_k = A_k xy + B_k y^2 + C_k xy^2 + D_k y^3 + E_k xy^3 \quad (9.7)$$

que satisfazem (9.2) para quaisquer valores de coeficientes. Funções do mesmo tipo foram também utilizadas por GDOUTOS & KATTIS (1982).

LEKHNITSKII et al. (1968) fornecem os seguintes resultados finais para as componentes de tensão:

$$\sigma_x^{(k)} = \frac{6E_1^{(k)}}{hS} (M - Px) \cdot (2 \cdot S_1 y - S_2), \quad \sigma_y^{(k)} = 0 \quad \text{onde } (k = 1, 2, \dots, n) \quad (9.8)$$

$$\tau_{xy}^{(k)} = \frac{6P}{hS} \cdot \left\{ \begin{aligned} &S_1 \left[\sum_{i=1}^{k-1} (b_i^2 - b_{i-1}^2) \cdot E_x^{(i)} + (y^2 - b_{k-1}^2) \cdot E_x^{(k)} \right] \\ &- S_2 \left[\sum_{i=1}^{k-1} (b_i - b_{i-1}) \cdot E_x^{(i)} + (y - b_{k-1}) \cdot E_x^{(k)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

onde ($k = 2, 3, \dots, n-1$)

$$\tau_{xy}^{(1)} = \frac{6P \cdot E_x^{(1)}}{hS} (S_1 y - S_2) \cdot y \quad , \text{ para } k = 1 \quad (9.10)$$

$$\tau_{xy}^{(n)} = \frac{6P \cdot E_x^{(n)}}{hS} [S_2 - (b_n + y)S_1] \cdot (b_n - y) \quad , \text{ para } k = n \quad (9.11)$$

Onde as seguintes designações são introduzidas:

$$S_1 = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) \cdot E_x^{(k)} \quad (9.12a)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n (b_k^2 - b_{k-1}^2) \cdot E_x^{(k)} \quad (9.12b)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^n (b_k^3 - b_{k-1}^3) \cdot E_x^{(k)} \quad (9.12c)$$

$$S = 4 \cdot S_1 S_3 - 3 \cdot S_2^2 \quad (9.12d)$$

Observa-se que o eixo neutro é encontrado numa distância da borda superior igual a:

$$y_0 = \frac{S_2}{2S_1} \quad (9.13)$$

A equação da elástica da viga é do mesmo tipo do caso de uma viga homogênea engastada de rigidez D:

$$v = \frac{P}{6D} (x^3 - 3l^2 x + 2l^3) - \frac{M}{2D} (x - l)^2 \quad (9.14)$$

E a rigidez (D) é determinada pela fórmula:

$$D = \frac{hS}{12S_1} \quad (9.15)$$

Todas as fórmulas apresentadas podem ser simplificadas quando as camadas são de mesma espessura. LEKHNITSKII et al. (1968), procurando aplicar a formulação desenvolvida, apresentam um exemplo onde é possível observar a maneira que as tensões se distribuem em vigas compostas por lâminas de diferentes propriedades elásticas.

A viga engastada (Figura 9.3) é composta por duas camadas, nas quais, a relação entre suas alturas é 1:3 e a relação entre os módulos de elasticidade longitudinal é 1:9 ($E_1^{(1)} = E_1$ e $E_1^{(2)} = 9E_1$), isto é, a camada inferior tem maior rigidez que a camada superior.

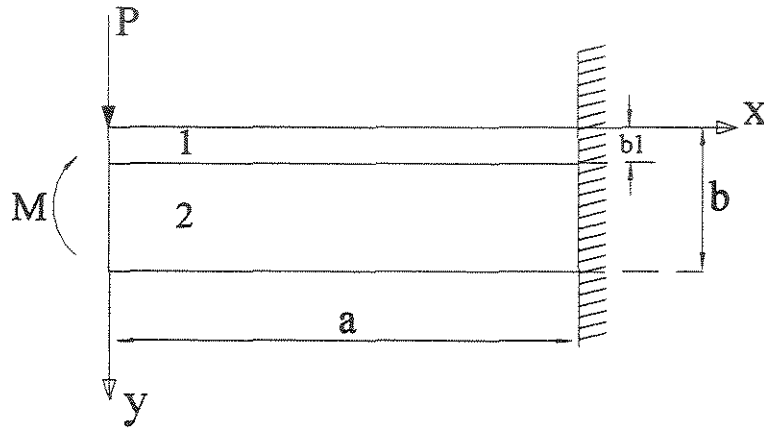


FIGURA 9.3 – Viga laminada composta de duas camadas sujeita a uma carga concentrada.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

Usando-se as equações (9.9) – (9.13), obtém-se os seguintes resultados:

- a linha neutra é localizada na segunda camada e sua distância da borda superior é $y_0 = 0.61 \cdot b$. Introduzindo-se ainda as designações:

$$m = \frac{M - Px}{hb^2} \quad \text{e} \quad p = \frac{P}{hb} \quad (9.16)$$

obtem-se as tensões sobre as bordas superior, inferior, na linha de contato entre as camadas e também sobre a linha neutra:

$$\left(\sigma_x^{(1)}\right)_{y=0} = -1.61 \cdot m, \quad \left(\tau_{xy}^{(1)}\right)_{y=0} = 0; \quad (9.17a)$$

$$\left(\sigma_x^{(1)}\right)_{y=b/4} = -0.95 \cdot m, \quad \left(\sigma_x^{(2)}\right)_{y=b/4} = -8.51 \cdot m; \quad (9.17b)$$

$$\left(\tau_{xy}^{(1)}\right)_{y=b/4} = \left(\tau_{xy}^{(2)}\right)_{y=b/4} = -0.32 \cdot p; \quad (9.17c)$$

$$\left(\sigma_x^{(2)}\right)_{y=y_0} = 0, \quad \left(\tau_{xy}^{(2)}\right)_{y=y_0} = -1.84 \cdot p; \quad (9.17d)$$

$$\left(\sigma_x^{(2)}\right)_{y=b} = 9.35 \cdot m, \quad \left(\tau_{xy}^{(2)}\right)_{y=b} = 0; \quad (9.17e)$$

Numa viga engastada homogênea a maior tensão normal seria $6m$ e a maior tensão tangencial $1.5p$. As distribuições de tensão σ_x e τ_{xy} na seção transversal são mostradas na Figura 9.4:

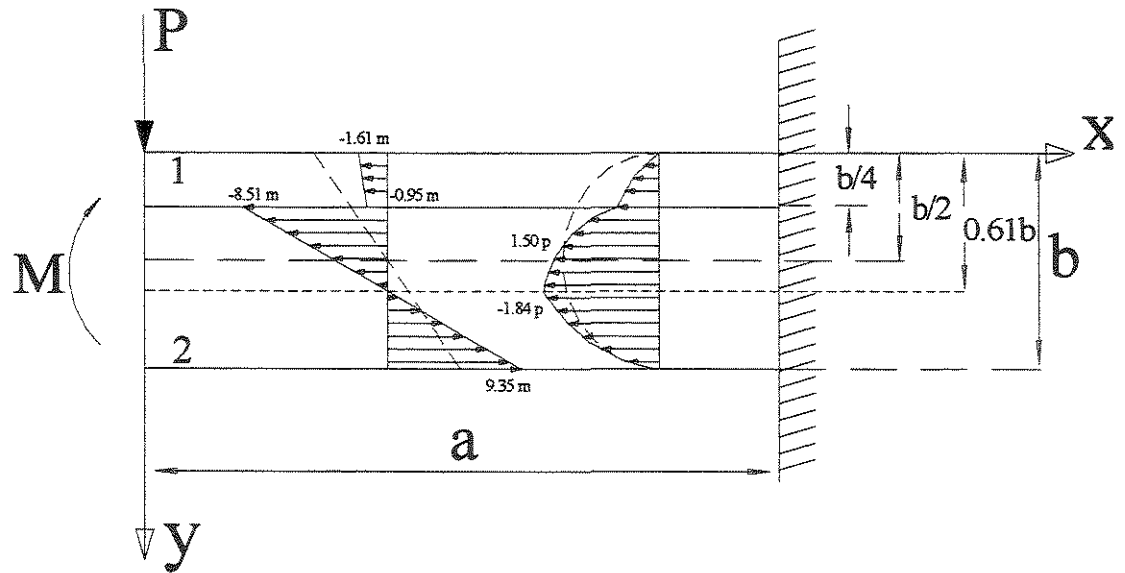


FIGURA 9.4 –Distribuições de tensões normais e tangenciais numa viga laminada.

Fonte: LEKHNITSKII et al. (1968).

No próximo item, visando-se a aplicação da formulação desenvolvida por LEKHNITSKII et al. (1968), analisa-se uma viga engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

9.3 Exemplo de Aplicação do Método de LEKHNITSKII et al. (1968)

Com o intuito de se aplicar a metodologia de análise de tensões em vigas laminadas formulada por LEKHNITSKII et al. (1968), analisa-se neste item uma viga engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, conforme Figura 9.5.

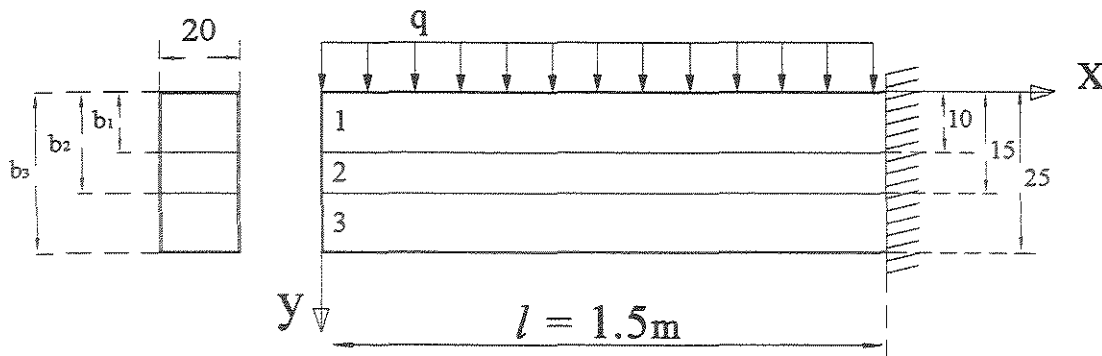


FIGURA 9.5 – Viga engastada composta de três camadas.

Esta viga é composta de três camadas (todas de largura $b = 20$ cm), consideradas homogêneas e ortotrópicas, sendo que as camadas superior e inferior ($h = 10$ cm) são constituídas de madeira espécie ipê e a camada do centro ($h = 5$ cm), de madeira espécie guapuruvú. Os valores dos módulos de elasticidade longitudinal para as duas espécies de madeiras são:

TABELA 9.1 - Valores para o módulo de elasticidade (E_x).

Espécie	E_x (KN/m ²)
Guapuruvú	3.507.500,00
Ipê	18.043.900,00

De posse desses dados, e substituindo-os nas equações apresentadas no exemplo anterior, têm-se:

$$S_1 = [(b_1)E_x^{(1)} + (b_2 - b_1)E_x^{(2)} + (b_3 - b_2)E_x^{(3)}] = 3.784.155,00 \text{ KN/m}^3 \quad (9.18a)$$

$$S_2 = [(b_1^2)E_x^{(1)} + (b_2^2 - b_1^2)E_x^{(2)} + (b_3^2 - b_2^2)E_x^{(3)}] = 946.038,75 \text{ KN/m}^3 \quad (9.18b)$$

$$S_3 = [(b_1^3)E_x^{(1)} + (b_2^3 - b_1^3)E_x^{(2)} + (b_3^3 - b_2^3)E_x^{(3)}] = 247.411,98 \text{ KN/m}^3 \quad (9.18c)$$

$$S = 4 \cdot S_1 S_3 - 3 \cdot S_2^2 = 1.06001 \times 10^{12} \text{ KN/m}^3 \quad (9.18d)$$

Analisando-se as tensões na seção $x = 1.5 \text{ m}$ (onde $M = -\frac{q \cdot x^2}{2} = 22.5 \text{ KN.m}$), têm-se,

para as tensões normais nas camadas:

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{6E_x^{(1)}}{hS} \left(-\frac{qx^2}{2} \right) \cdot (2 \cdot S_1 y - S_2)$$

$$\sigma_x^{(1)} = -0,011490 \cdot (7.568.310,00 \cdot y - 946.038,75) \quad 0 \leq y \leq 10 \quad (9.19)$$

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{E_x^{(2)}}{E_x^{(1)}} \cdot \sigma_x^{(1)} = 0,194386 \cdot (\sigma_x^{(1)}) \quad 10 \leq y \leq 15 \quad (9.20)$$

$$\sigma_x^{(3)} = \sigma_x^{(1)} = -0,011490 \cdot (7.568.310,00 \cdot y - 946.038,75) \quad 15 \leq y \leq 25 \quad (9.21)$$

E para a posição da linha neutra:

$$y_0 = \frac{S_2}{2 \cdot S_1} = 0.125 \text{ m} \quad (9.22)$$

que como se esperava, devido a posição simétrica das camadas, posicionada no centro da camada do meio.

As tensões normais são mostradas na Figura 9.6:

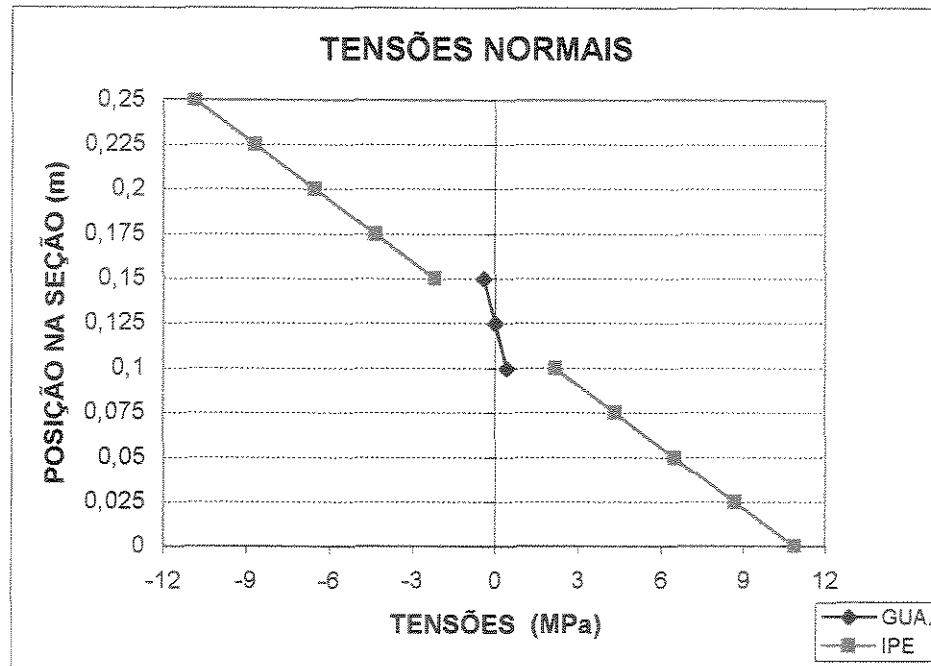


FIGURA 9.6 – Distribuições de tensões normais numa viga laminada composta de três camadas.

E para as tensões de cisalhamento:

$$\tau_{xy}^{(1)} = \frac{6 \cdot q \cdot x \cdot E_1^{(1)}}{hS} (S_1 y - S_2) \cdot y$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = 0,015320 \cdot (3.784.155,00 \cdot y - 946.038,75) \cdot y \quad 0 \leq y \leq 10 \quad (9.23)$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = \frac{6 \cdot q \cdot x}{hS} \left\{ S_1 \left[(b_1^2) E_x^{(1)} + (y^2 - b_1^2) E_1^{(2)} \right] - S_2 \left[(b_1) E_x^{(1)} + (y - b_1) E_1^{(2)} \right] \right\} \quad 10 \leq y \leq 15$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = 8,49046 \times 10^{-10} \left\{ 3.784.155,00 \left[180.439,00 + (y^2 - 0,01) \cdot 3.507.500,00 \right] - \right. \\ \left. - 946.038,75 \cdot \left[1.804.390,00 + (y - 0,1) \cdot 3.507.500,00 \right] \right\} \quad (9.24)$$

$$\tau_{xy}^{(3)} = \frac{6 \cdot q \cdot x \cdot E_x^{(3)}}{hS} [S_2 - (b_3 + y) S_1] \cdot (b_3 - y)$$

$$\tau_{xy}^{(3)} = 0,015320 \cdot [946.038,75 - (0,25 + y) \cdot 3.784.155,00] \cdot (0,25 - y) \quad 15 \leq y \leq 25 \quad (9.25)$$

Estas tensões cisalhantes são mostradas na Figura 9.7:

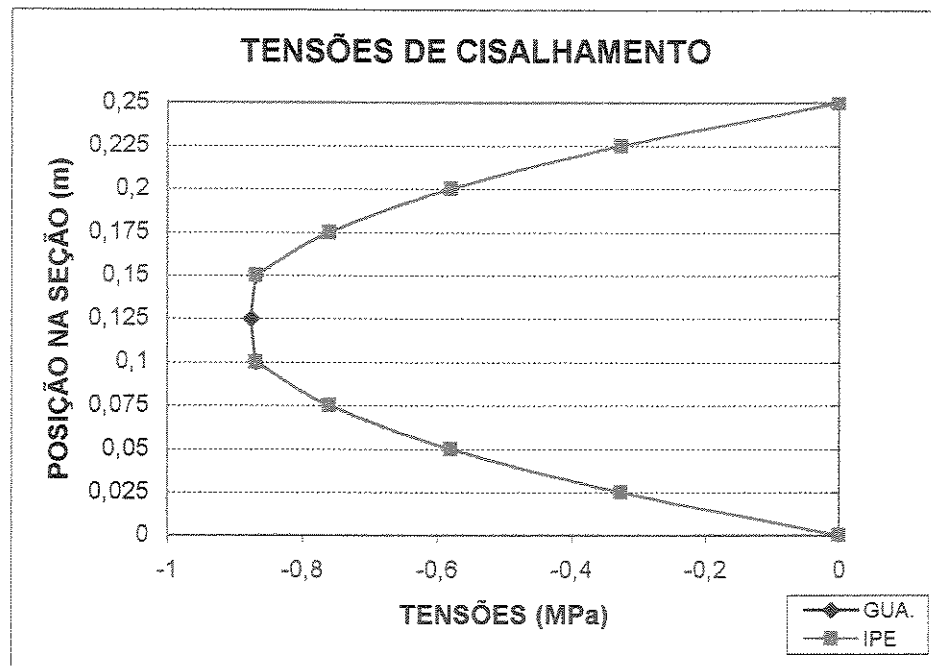


FIGURA 9.7 – Distribuições de tensões de cisalhamento numa viga laminada composta de três camadas.

Agora, alterando-se as espécies de madeiras das camadas superior e inferior para **guapuruvú** e da camada do centro para **ipê**, têm-se:

$$S_1 = 1.603.695,00 \quad \text{KN/m}^3; \quad (9.26a)$$

$$S_2 = 400.923,75 \quad \text{KN/m}^3; \quad (9.26b)$$

$$S_3 = 89.328,64 \quad \text{KN/m}^3; \quad (9.26c)$$

$$S = 90.803.997.322,00 \quad \text{KN/m}^3. \quad (9.26d)$$

E para as tensões:

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(3)} = -0,026073 \cdot (3.207.390,00 \cdot y - 400.923,75) \quad 0 \leq y \leq 10 \quad (9.27)$$

$$\sigma_x^{(2)} = 5.14437 \cdot \sigma_x^{(1)} \quad 10 \leq y \leq 15 \quad (9.28)$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = 0,034764 \cdot (1.603.695,00 \cdot y - 400.923,75) \cdot y \quad 0 \leq y \leq 10 \quad (9.29)$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = 9.91145 \times 10^{-9} \left\{ 1.603.695,00 [35.075,00 + (y^2 - 0.01) \cdot 18.043.900,00] - \right. \\ \left. - 400.923,75 \cdot [350.750,00 + (y - 0.1) \cdot 18.043.900,00] \right\} \quad 10 \leq y \leq 15 \quad (9.30)$$

$$\tau_{xy}^{(3)} = 0,034764 \cdot [400.923,75 - (0,25 + y) \cdot 1.603.695,00] \cdot (0,25 - y) \quad 15 \leq y \leq 25 \quad (9.31)$$

A linha neutra novamente está posicionada em $y_0 = \frac{S_2}{2 \cdot S_1} = 0.125m$.

Nas Figuras 9.8 e 9.9 são mostrados os gráficos das distribuições das tensões normais e cisalhantes, considerando-se a nova configuração das camadas:

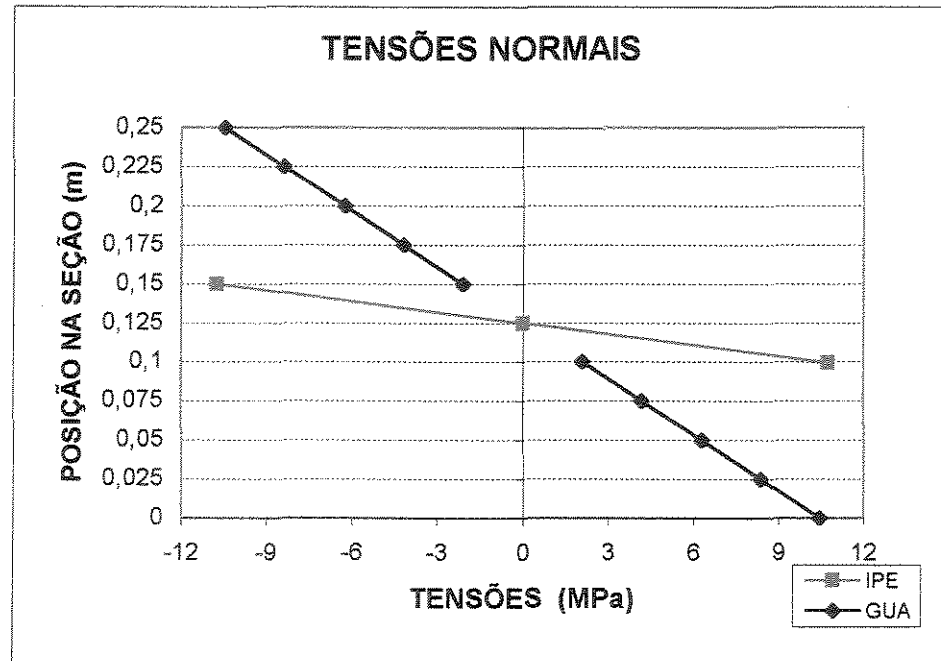


FIGURA 9.8 – Distribuições de tensões de cisalhamento numa viga laminada composta de três camadas.

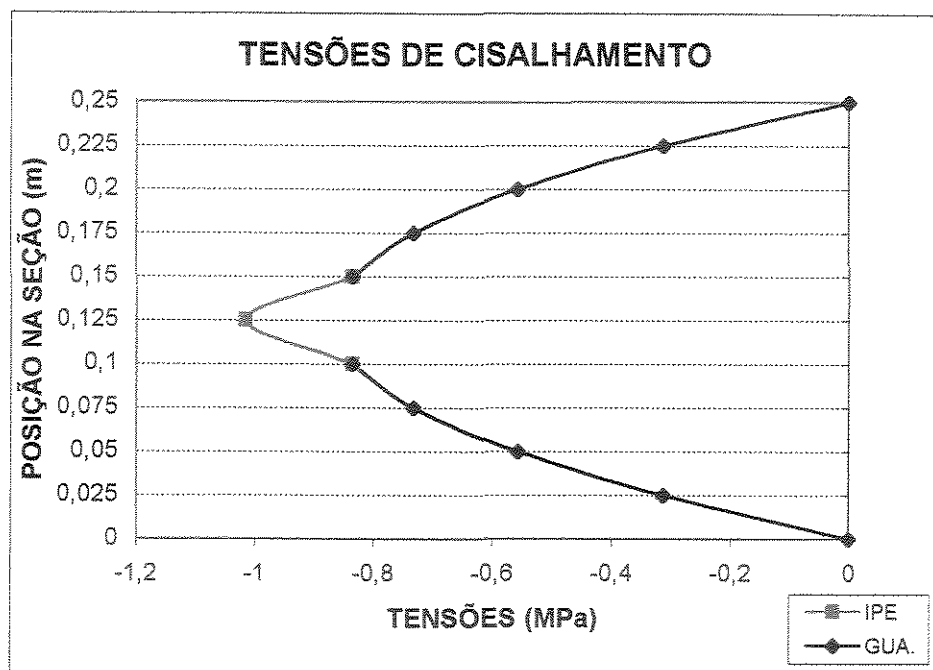


FIGURA 9.9 – Distribuições de tensões de cisalhamento numa viga laminada composta de três camadas.

Nos gráficos apresentados, constata-se que as camadas que possuem maior módulo de elasticidade (E_x), camadas estas constituídas de madeira espécie **ipê**, absorvem as maiores tensões. Assim, a primeira forma de posicionamento das camadas se mostra mais eficiente, pois as camadas mais resistentes são localizadas nas posições onde a viga é mais solicitada, ou seja, na borda superior (maiores tensões de tração) e inferior (maiores tensões de compressão).

É oportuno salientar que uma viga isotrópica e homogênea apresenta comportamento das tensões uniforme, ou seja, sem as discontinuidades apresentadas nos gráficos anteriores.

10 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

Este capítulo tem a finalidade de organizar as conclusões já apresentadas nos capítulos 6, 7 e 8 e também, tecer alguns comentários a respeito do estudo desenvolvido.

Na análise comparativa dos exemplos de LEKHNITSKII et al. (1968), constatou-se que não houve grandes diferenças entre as vigas anisotrópicas e as isotrópicas no que se concerne à distribuição de tensões de cisalhamento. Para os deslocamentos e para a distribuição de tensões normais, as diferenças mais significativas foram apresentadas pelas vigas das espécies **ipê** e **ash**, espécies essas que possuem maiores valores para os coeficientes de influência mútua de 1ª espécie ($\eta_{xy,x}$) e para o módulo de elasticidade longitudinal (E_x).

De uma maneira geral, constatou-se que a influência da anisotropia sobre as tensões e sobre os deslocamentos foi proporcional aos valores do coeficiente de influência mútua de 1ª espécie e do módulo de elasticidade longitudinal (E_x), dependentes de cada material, e também, proporcional à esbeltez da seção transversal da viga. Para vigas de vãos menores, onde a participação das tensões de cisalhamento sobre os deslocamentos aumenta, a diferença entre os deslocamentos da linha elástica dos dois tipos de vigas (anisotrópica e isotrópica) foi maior.

Na análise dos exemplos de HASHIN (1967), ao se comparar as tensões normais nas vigas de madeira das espécies **ipê** e **guapuruvú**, verificou-se que as vigas da espécie **ipê** apresentaram maior diferença de comportamento em relação as vigas isotrópicas, tanto para as vigas engastadas como para as bi-apoiadas.

Observou-se também, que na extremidade livre das vigas engastadas anisotrópicas, diferente do que é apresentado pelas vigas isotrópicas, ainda se concentram tensões normais. Isso deve-se ao fato que as seções transversais, das vigas anisotrópicas, não permanecem planas após a deformação da viga, assim, havendo deformações tangenciais, surgem tensões normais devido a influência do coeficiente de influência mútua de 1ª espécie $\eta_{xy,x}$.

Na comparação dos resultados de LEKHNITSKII et al. (1968) e de HASHIN (1967), para uma viga bi-apoada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, verificou-se que as equações que os pesquisadores obtiveram não diferem muito em termos de valores de tensões para a seção de análise no meio do vão ($x = 0$). Porém, ao se distanciar a seção de análise para $x = 0.75m$, as diferenças já são mais significativas, ocorrendo uma inversão de valores máximos de tensões (de tração e de compressão) entre os resultados destes pesquisadores.

Considerando-se apenas os recursos analíticos é difícil concluir a cerca de qual dos resultados é o mais correto. Verificando-se as equações de tensões fornecidas pelos pesquisadores, em seus respectivos trabalhos, observa-se que elas satisfazem as equações de equilíbrio de tensões. Infelizmente, estes pesquisadores não fornecem em seus trabalhos essas funções de tensão. LEKHNITSKII et al. (1968) apenas comentam que essa função tem a forma de um polinômio de 5ª ordem. HASHIN (1967), como já comentado, vai um pouco mais além e fornece o método para obtenção dessa função.

Tratando-se da aplicação do método de solução polinomial de HASHIN (1967) para a obtenção de funções de tensão, pôde-se constatar, nos dois exemplos estudados, que o método é eficiente na solução de vigas anisotrópicas sujeitas a carregamentos distribuídos em forma de polinômios.

Na análise da viga engastada anisotrópica, sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, os resultados obtidos praticamente não diferem das soluções de LEKHNITSKII et al. (1968) para a mesma viga, confirmando assim a veracidade dos mesmos. Em comparação com as vigas isotrópicas, os resultados mostram também que as vigas constituídas de madeira espécie ipê apresentaram maiores diferenças, tantos para tensões normais como para as tangenciais.

Os resultados obtidos para as distribuições de tensões normais e de cisalhamento, para a viga engastada sujeita a um carregamento triangular, apresentaram maiores diferenças em relação à viga isotrópica, do que para o exemplo onde se analisou a viga sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

A razão para esse aumento de diferença é devido ao carregamento variável (triangular) e também a participação do coeficiente de influência mútua $\eta_{yz,y}$, que aparece na função de tensão obtida para esse exemplo, e que quantifica a influência de tensões tangenciais no plano yz em deformações normais na direção y.

No que se refere aos sistemas compósitos em camadas, é importante comentar que não se teve a pretensão neste trabalho de se fazer uma investigação completa sobre o assunto, e sim, de se destacar alguns aspectos relativos à aplicação das funções de tensão nesses sistemas. Contudo, o estudo apresentado mostrou as diferenças no comportamento das tensões nesses sistemas, quando comparados com as estruturas constituídas por materiais isotrópicos e homogêneos.

Abordando-se, agora, as funções de tensão, elas se mostraram, de uma maneira geral, considerando-se apenas os recursos analíticos, eficientes nas soluções de problemas da mecânica dos sólidos. Porém, é preciso salientar que os métodos de soluções baseados nas funções de tensão são aproximados, pois a forma da função de tensão, no caso de HASHIN (1967) polinomial, pode não corresponder a uma solução exata.

Deve-se observar que para uma análise completa sobre este assunto, paralelamente à aplicação do método analítico, seria necessário ensaios de laboratório e a utilização de método numérico. No entanto, considerando-se que na realidade todas as estruturas existentes possuem algum grau de anisotropia, e que a isotropia é uma suposição, os resultados obtidos por essa pesquisa, mesmo cercados de algumas imprecisões, são importantes, pois registram as peculiaridades presentes no comportamento mecânico das vigas anisotrópicas.

Por fim, é oportuno salientar sobre a complexidade do tema estudado e que visou-se também com esta pesquisa, a apresentação de uma fundamentação teórica sobre anisotropia, procurando-se assim, tornar o assunto mais próximo das aplicações na engenharia de estruturas.

ANEXOS

Anexo A

Resultado da solução do sistema de 15 (quinze) equações, pelo programa MATHEMATICA, que fornece os 15 (quinze) coeficientes C_{nm} necessários para a determinação da função de tensão da viga engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

```

Solve[{C00 - C01*b + C02*b^2 - C03*b^3 + C04*b^4 - C05*b^5 == 0,
      C00 + C01*b + C02*b^2 + C03*b^3 + C04*b^4 + C05*b^5 ==
      -(p*l^2)/2, C10 - C11*b + C12*b^2 - C13*b^3 + C14*b^4 == 0,
      C10 + C11*b + C12*b^2 + C13*b^3 + C14*b^4 == p*l,
      C20 - C21*b + C22*b^2 - C23*b^3 == 0,
      C20 + C21*b + C22*b^2 + C23*b^3 == -p/2,
      C01 - 2*C02*b + 3*C03*b^2 - 4*C04*b^3 + 5*C05*b^4 == 0,
      C01 + 2*C02*b + 3*C03*b^2 + 4*C04*b^3 + 5*C05*b^4 == 0,
      C11 - 2*C12*b + 3*C13*b^2 - 4*C14*b^3 == 0,
      C11 + 2*C12*b + 3*C13*b^2 + 4*C14*b^3 == 0,
      C21 - 2*C22*b + 3*C23*b^2 == 0, C21 + 2*C22*b + 3*C23*b^2 == 0,
      4*A22*C22 - 3*A13*C13 + 12*A04*C04 == 0,
      A22*C23 - A13*C14 + 5*A04*C05 == 0, -A13*C23 + A04*C14 == 0},
{C00, C01, C02, C03, C04, C05, C10, C11,
 C12, C13, C14, C20, C21, C22, C23}]

```

$$\left\{ \left\{ C00 \rightarrow -\frac{4 A04 p l^2 + A13 b p l}{16 A04}, C10 \rightarrow -\frac{-A13 b p - 4 A04 l p}{8 A04}, \right. \right.$$

$$C20 \rightarrow -\frac{p}{4}, C01 \rightarrow -\frac{-A13^2 p b^2 + A04 A22 p b^2 + 15 A04^2 l^2 p}{40 A04^2 b},$$

$$C02 \rightarrow \frac{A13 l p}{8 A04 b}, C03 \rightarrow \frac{p l^2}{8 b^3} + \frac{A04 A22 p - A13^2 p}{20 A04^2 b}, C11 \rightarrow \frac{3 l p}{4 b},$$

$$C12 \rightarrow -\frac{A13 p}{4 A04 b}, C21 \rightarrow -\frac{3 p}{8 b}, C04 \rightarrow -\frac{A13 l p}{16 A04 b^3}, C13 \rightarrow -\frac{l p}{4 b^3},$$

$$C22 \rightarrow 0, C05 \rightarrow -\frac{A04 A22 p - A13^2 p}{40 A04^2 b^3}, C14 \rightarrow \frac{A13 p}{8 A04 b^3}, C23 \rightarrow \frac{p}{8 b^3} \left. \right\}$$

Substituição dos coeficientes Cmn na função de tensão:

```

FUNENG = Function[{x, y, C00, C01, C02, C03, C04,
  C05, C10, C11, C12, C13, C14, C20, C21, C22, C23},
  C00 + C01*y + C02*y^2 + C03*y^3 + C04*y^4 + C05*y^5 +
  C10*x + C11*x*y + C12*x*y^2 + C13*x*y^3 + C14*x*y^4 +
  C20*x^2 + C21*x^2*y + C22*x^2*y^2 + C23*x^2*y^3] [x, y,
  -  $\frac{4 A04 p l^2 + A13 b p l}{16 A04}$ , -  $\frac{-A13^2 p b^2 + A04 A22 p b^2 + 15 A04^2 l^2 p}{40 A04^2 b}$ ,
   $\frac{A13 l p}{8 A04 b}$ ,  $\frac{p l^2}{8 b^3} + \frac{A04 A22 p - A13^2 p}{20 A04^2 b}$ , -  $\frac{A13 l p}{16 A04 b^3}$ ,
  -  $\frac{A04 A22 p - A13^2 p}{40 A04^2 b^3}$ , -  $\frac{-A13 b p - 4 A04 l p}{8 A04}$ ,  $\frac{3 l p}{4 b}$ ,
  -  $\frac{A13 p}{4 A04 b}$ , -  $\frac{l p}{4 b^3}$ ,  $\frac{A13 p}{8 A04 b^3}$ , -  $\frac{p}{4}$ , -  $\frac{3 p}{8 b}$ , 0,  $\frac{p}{8 b^3}$ ]
  -  $\frac{(A04 A22 p - A13^2 p) y^5}{40 A04^2 b^3} - \frac{A13 l p y^4}{16 A04 b^3} + \frac{A13 p x y^4}{8 A04 b^3} +$ 
   $\frac{p x^2 y^3}{8 b^3} + \left( \frac{p l^2}{8 b^3} + \frac{A04 A22 p - A13^2 p}{20 A04^2 b} \right) y^3 - \frac{l p x y^3}{4 b^3} + \frac{A13 l p y^2}{8 A04 b} -$ 
   $\frac{A13 p x y^2}{4 A04 b} - \frac{3 p x^2 y}{8 b} - \frac{(-A13^2 p b^2 + A04 A22 p b^2 + 15 A04^2 l^2 p) y}{40 A04^2 b} +$ 
   $\frac{3 l p x y}{4 b} - \frac{p x^2}{4} - \frac{4 A04 p l^2 + A13 b p l}{16 A04} - \frac{(-A13 b p - 4 A04 l p) x}{8 A04}$ 

```

**Função de tensão obtida para a solução da viga engastada
sujeita a um carregamento uniformemente distribuído:**

```
Simplify[FUNENG]
```

$$-\frac{1}{80 A04^2 b^3} (p (b+y)^2 (10 A04^2 (2 b-y) (l-x)^2 - 2 A13^2 (b-y)^2 y + A04 (b-y)^2 (5 A13 (l-2 x) + 2 A22 y)))$$


```

FUNALFA = Function[{x, y, A04, A13, A22},
  -  $\frac{1}{80 A04^2 b^3} (p (b+y)^2 (10 A04^2 (2 b-y) (1-x)^2 -$ 
     $2 A13^2 (b-y)^2 y + A04 (b-y)^2 (5 A13 (1-2 x) + 2 A22 y)) ) ] [$ 
  x, y, S1111, 4 * S1112, (S1122 + S1212) ]
  -  $\frac{1}{80 b^3 S1111^2} (p (b+y)^2 (10 S1111^2 (2 b-y) (l-x)^2 -$ 
     $32 S1112^2 (b-y)^2 y + S1111 (b-y)^2 (20 S1112 (l-2 x) + 2 (S1122 + S1212) y)) ) ]$ 

```

```

FUNALFACOMPLIANCIA =

```

```

Function[{x, y, S1111, S1112, S1122, S1212}, -  $\frac{1}{80 b^3 S1111^2}$ 
   $(p (b+y)^2 (10 S1111^2 (2 b-y) (1-x)^2 - 32 S1112^2 (b-y)^2 y +$ 
     $S1111 (b-y)^2 (20 S1112 (1-2 x) + 2 (S1122 + S1212) y)) ) ] [$ 
  x, y, 1 / Ex, nxy / (2 * Ex), -vxy / Ex, 1 / (4 * Gxy) ]
  -  $\frac{Ex^2 p (b+y)^2 \left( \frac{10 (2 b-y) (l-x)^2}{Ex^2} - \frac{8 nxy^2 (b-y)^2 y}{Ex^2} + \frac{(b-y)^2 \left( \frac{10 nxy (l-2 x)}{Ex} + 2 \left( \frac{1}{4 Gxy} - \frac{vxy}{Ex} \right) y \right)}{Ex} \right)}{80 b^3}$ 

```

Função de tensão obtida para a solução da viga engastada sujeita a um carregamento, com as constantes do tensor de compliância substituídas pelas constantes elásticas:

```

Simplify[FUNALFACOMPLIANCIA]

```

```


$$- \frac{p (b+y)^2 \left( 10 (2 b-y) (l-x)^2 - 8 nxy^2 (b-y)^2 y + \frac{(b-y)^2 (Ex y + 4 Gxy (5 l nxy - 10 x nxy - vxy y))}{2 Gxy} \right)}{80 b^3}$$


```

Determinação das tensões:

derly = D[FUNALFACOMPLIANCIA, y]

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{80b^3} \\
 & \left(p(b+y)^2 \left(-\frac{8(b-y)^2 nxy^2}{Ex^2} + \frac{16(b-y)y nxy^2}{Ex^2} - \frac{10(l-x)^2}{Ex^2} + \frac{2\left(\frac{1}{4Gxy} - \frac{vxy}{Ex}\right)(b-y)^2}{Ex} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{2(b-y)\left(\frac{10nxy(l-2x)}{Ex} + 2\left(\frac{1}{4Gxy} - \frac{vxy}{Ex}\right)y\right)}{Ex} \right) Ex^2 \right) - \\
 & \frac{p(b+y) \left(\frac{10(2b-y)(l-x)^2}{Ex^2} - \frac{8nxy^2(b-y)^2 y}{Ex^2} + \frac{(b-y)^2 \left(\frac{10nxy(l-2x)}{Ex} + 2\left(\frac{1}{4Gxy} - \frac{vxy}{Ex}\right)y \right)}{Ex} \right) Ex^2}{40b^3}
 \end{aligned}$$

Tensões normais à seção:

SIGMX = D[derly, y]

$$\begin{aligned}
 & -\frac{p(b+y)^2 \left(\frac{32(b-y)nxy^2}{Ex^2} - \frac{16y nxy^2}{Ex^2} - \frac{8\left(\frac{1}{4Gxy} - \frac{vxy}{Ex}\right)(b-y)}{Ex} + \frac{2\left(\frac{10nxy(l-2x)}{Ex} + 2\left(\frac{1}{4Gxy} - \frac{vxy}{Ex}\right)y\right)}{Ex} \right) Ex^2}{80b^3} - \\
 & \frac{1}{20b^3} \left(p(b+y) \left(-\frac{8(b-y)^2 nxy^2}{Ex^2} + \frac{16(b-y)y nxy^2}{Ex^2} - \frac{10(l-x)^2}{Ex^2} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{2\left(\frac{1}{4Gxy} - \frac{vxy}{Ex}\right)(b-y)^2}{Ex} - \frac{2(b-y)\left(\frac{10nxy(l-2x)}{Ex} + 2\left(\frac{1}{4Gxy} - \frac{vxy}{Ex}\right)y\right)}{Ex} \right) Ex^2 \right) - \\
 & \frac{p \left(\frac{10(2b-y)(l-x)^2}{Ex^2} - \frac{8nxy^2(b-y)^2 y}{Ex^2} + \frac{(b-y)^2 \left(\frac{10nxy(l-2x)}{Ex} + 2\left(\frac{1}{4Gxy} - \frac{vxy}{Ex}\right)y \right)}{Ex} \right) Ex^2}{40b^3}
 \end{aligned}$$

Simplify[SIGMX]

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{40b^3 Gxy} (p((3Exy + 4Gxy(-12ynxy^2 + 5lnxy - 10xnxy - 3vxyy))b^2 + \\
 & \quad 5y(2Gxy(3l^2 - 6xl - 6nxyyl + 3x^2 + 8nxy^2y^2 + 2vxyy^2 + 12nxyxy) - Exy^2)))
 \end{aligned}$$

Tensões de cisalhamento:

der1x = D[FUNALFACOMPLIANCIA, x]

$$-\frac{Ex^2 p \left(-\frac{20 nxy (b-y)^2}{Ex^2} - \frac{20 (l-x) (2 b-y)}{Ex^2} \right) (b+y)^2}{80 b^3}$$

TALXY = -D[der1x, y]

$$\frac{p \left(\frac{20 (l-x)}{Ex^2} + \frac{40 nxy (b-y)}{Ex^2} \right) (b+y)^2 Ex^2}{80 b^3} + \frac{p \left(-\frac{20 nxy (b-y)^2}{Ex^2} - \frac{20 (l-x) (2 b-y)}{Ex^2} \right) (b+y) Ex^2}{40 b^3}$$

simplify[TALXY]

$$\frac{p (3 l - 3 x - 4 nxy y) (y^2 - b^2)}{4 b^3}$$

Tensões normais na direção Y:

SIGMY = D[der1x, x]

$$-\frac{p (2 b - y) (b + y)^2}{4 b^3}$$

Anexo B

Resultado da solução do sistema de vinte e duas equações, pelo programa MATHEMATICA, que fornece os vinte e dois coeficientes C_{mn} necessários para a determinação da função de tensão da viga engastada, sujeita a um carregamento distribuído de forma triangular.

```

Solve[
{C00 - C01*b + C02*b^2 - C03*b^3 + C04*b^4 - C05*b^5 + C06*b^6 == 0,
C00 + C01*b + C02*b^2 + C03*b^3 +
  C04*b^4 + C05*b^5 + C06*b^6 == -(q*1^2) / 6,
C10 - C11*b + C12*b^2 - C13*b^3 + C14*b^4 - C15*b^5 == 0,
C10 + C11*b + C12*b^2 + C13*b^3 + C14*b^4 + C15*b^5 == +(q*1) / 2,
C20 - C21*b + C22*b^2 - C23*b^3 + C24*b^4 == 0,
C20 + C21*b + C22*b^2 + C23*b^3 + C24*b^4 == -q / 2,
  C30 - C31*b + C32*b^2 - C33*b^3 == 0,
C30 + C31*b + C32*b^2 + C33*b^3 == +q / (6*1), C01 - 2*C02*b +
  3*C03*b^2 - 4*C04*b^3 + 5*C05*b^4 - 6*C06*b^5 == 0,
C01 + 2*C02*b + 3*C03*b^2 + 4*C04*b^3 + 5*C05*b^4 + 6*C06*b^5 ==
  0, C11 - 2*C12*b + 3*C13*b^2 - 4*C14*b^3 + 5*C15*b^4 == 0,
C11 + 2*C12*b + 3*C13*b^2 + 4*C14*b^3 + 5*C15*b^4 == 0,
C21 - 2*C22*b + 3*C23*b^2 - 4*C24*b^3 == 0,
C21 + 2*C22*b + 3*C23*b^2 + 4*C24*b^3 == 0,
C31 - 2*C32*b + 3*C33*b^2 == 0, C31 + 2*C32*b + 3*C33*b^2 == 0,
-24*S2212*C31 + 8*(S1122 + 2*S1212)*C22 -
  24*S1112*C13 + 24*S1111*C04 == 0, -48*S2212*C32 +
  2*(S1122 + 2*S1212)*12*C23 - 96*S1112*C14 + 120*S1111*C05 == 0,
2*(S1122 + 2*S1212)*12*C32 - 48*S1112*C23 + 24*S1111*C14 == 0,
72*(S1122 + 2*S1212)*C33 - 192*S1112*C24 + 120*S1111*C15 == 0,
48*(S1122 + 2*S1212)*C24 - 72*S2212*C33 - 240*S1112*C15 +
  360*S1111*C06 == 0, -72*S1112*C33 + 24*S1111*C24 == 0},
{C00, C01, C02, C03, C04, C05, C06, C10, C11, C12, C13,
C14, C15, C20, C21, C22, C23, C24, C30, C31, C32, C33}]

```

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left\{ C_{00} \rightarrow \right. \right. \\
 & \quad - \frac{1}{120 l S_{1111}^3} (-16 q S_{1112}^3 b^3 + 8 q S_{1111} S_{1112} S_{1122} b^3 + 16 q S_{1111} S_{1112} S_{1212} b^3 - \\
 & \quad 13 q S_{1111}^2 S_{2212} b^3 + 15 l^2 q S_{1111}^2 S_{1112} b + 10 l^3 q S_{1111}^3), \\
 & C_{10} \rightarrow - \frac{-l q S_{1111} - b q S_{1112}}{4 S_{1111}}, C_{20} \rightarrow - \frac{2 l q S_{1111} + b q S_{1112}}{8 l S_{1111}}, C_{30} \rightarrow \frac{q}{12 l}, \\
 & C_{01} \rightarrow - \frac{-8 q S_{1112}^2 b^2 + q S_{1111} S_{1122} b^2 + 2 q S_{1111} S_{1212} b^2 + 5 l^2 q S_{1111}^2}{40 b S_{1111}^2}, \\
 & C_{11} \rightarrow - \frac{8 q S_{1112}^2 b^2 - q S_{1111} S_{1122} b^2 - 2 q S_{1111} S_{1212} b^2 - 15 l^2 q S_{1111}^2}{40 b l S_{1111}^2}, \\
 & C_{21} \rightarrow - \frac{3 q}{8 b}, C_{31} \rightarrow \frac{q}{8 b l}, \\
 & C_{02} \rightarrow - \frac{1}{120 b l S_{1111}^3} (48 b^2 q S_{1112}^3 - 30 l^2 q S_{1111}^2 S_{1112} - 20 b^2 q S_{1111} S_{1122} S_{1112} - \\
 & \quad 40 b^2 q S_{1111} S_{1212} S_{1112} + 27 b^2 q S_{1111}^2 S_{2212}), \\
 & C_{03} \rightarrow \frac{q l^2}{24 b^3} + \frac{-8 q S_{1112}^2 + q S_{1111} S_{1122} + 2 q S_{1111} S_{1212}}{20 b S_{1111}^2}, C_{12} \rightarrow - \frac{q S_{1112}}{2 b S_{1111}}, \\
 & C_{04} \rightarrow - \frac{1}{120 b^3 l S_{1111}^3} (-48 b^2 q S_{1112}^3 + 15 l^2 q S_{1111}^2 S_{1112} + \\
 & \quad 16 b^2 q S_{1111} S_{1122} S_{1112} + 32 b^2 q S_{1111} S_{1212} S_{1112} - 15 b^2 q S_{1111}^2 S_{2212}), \\
 & C_{05} \rightarrow - \frac{-8 q S_{1112}^2 + q S_{1111} S_{1122} + 2 q S_{1111} S_{1212}}{40 b^3 S_{1111}^2}, \\
 & C_{06} \rightarrow - \frac{16 q S_{1112}^3 - 4 q S_{1111} S_{1122} S_{1112} - 8 q S_{1111} S_{1212} S_{1112} + q S_{1111}^2 S_{2212}}{120 b^3 l S_{1111}^3}, \\
 & C_{13} \rightarrow \frac{8 q S_{1112}^2 - q S_{1111} S_{1122} - 2 q S_{1111} S_{1212}}{20 b l S_{1111}^2} - \frac{l q}{8 b^3}, \\
 & C_{22} \rightarrow \frac{q S_{1112}}{4 b l S_{1111}}, C_{14} \rightarrow \frac{q S_{1112}}{4 b^3 S_{1111}}, \\
 & C_{15} \rightarrow - \frac{8 q S_{1112}^2 - q S_{1111} S_{1122} - 2 q S_{1111} S_{1212}}{40 b^3 l S_{1111}^2}, \\
 & C_{23} \rightarrow \frac{q}{8 b^3}, C_{32} \rightarrow 0, C_{24} \rightarrow - \frac{q S_{1112}}{8 b^3 l S_{1111}}, C_{33} \rightarrow - \frac{q}{24 b^3 l} \left. \right\} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Substituição dos coeficientes C_{mn} na função de tensão:

FUNENG =

$$\begin{aligned}
& \text{Function}[\{x, y, C00, C01, C02, C03, C04, C05, C06, C10, C11, C12, \\
& \quad C13, C14, C15, C20, C21, C22, C23, C24, C30, C31, C32, C33\}, \\
& \quad C00 + C01 * y + C02 * y^2 + C03 * y^3 + C04 * y^4 + C05 * y^5 + C06 * y^6 + \\
& \quad C10 * x + C11 * x * y + C12 * x * y^2 + C13 * x * y^3 + C14 * x * y^4 + \\
& \quad C15 * x * y^5 + C20 * x^2 + C21 * x^2 * y + C22 * x^2 * y^2 + \\
& \quad C23 * x^2 * y^3 + C24 * x^2 * y^4 + C30 * x^3 + C31 * x^3 * y + \\
& \quad C32 * x^3 * y^2 + C33 * x^3 * y^3] \left[x, y, -\frac{1}{120 \, l \, S1111^3} \right. \\
& \quad \left(-16 \, q \, S1112^3 \, b^3 + 8 \, q \, S1111 \, S1112 \, S1122 \, b^3 + 16 \, q \, S1111 \, S1112 \, S1212 \, b^3 - \right. \\
& \quad \left. 13 \, q \, S1111^2 \, S2212 \, b^3 + 15 \, l^2 \, q \, S1111^2 \, S1112 \, b + 10 \, l^3 \, q \, S1111^3 \right) ; \\
& \quad \left. -\frac{-8 \, q \, S1112^2 \, b^2 + q \, S1111 \, S1122 \, b^2 + 2 \, q \, S1111 \, S1212 \, b^2 + 5 \, l^2 \, q \, S1111^2}{40 \, b \, S1111^2}, \right. \\
& \quad -\frac{1}{120 \, b \, l \, S1111^3} \left(48 \, b^2 \, q \, S1112^3 - 30 \, l^2 \, q \, S1111^2 \, S1112 - 20 \, b^2 \, q \, S1111 \right. \\
& \quad \left. S1122 \, S1112 - 40 \, b^2 \, q \, S1111 \, S1212 \, S1112 + 27 \, b^2 \, q \, S1111^2 \, S2212 \right), \\
& \quad \frac{q \, l^2}{24 \, b^3} + \frac{-8 \, q \, S1112^2 + q \, S1111 \, S1122 + 2 \, q \, S1111 \, S1212}{20 \, b \, S1111^2}, \\
& \quad -\frac{1}{120 \, b^3 \, l \, S1111^3} \left(-48 \, b^2 \, q \, S1112^3 + 15 \, l^2 \, q \, S1111^2 \, S1112 + 16 \, b^2 \, q \, S1111 \right. \\
& \quad \left. S1122 \, S1112 + 32 \, b^2 \, q \, S1111 \, S1212 \, S1112 - 15 \, b^2 \, q \, S1111^2 \, S2212 \right), \\
& \quad \left. -\frac{-8 \, q \, S1112^2 + q \, S1111 \, S1122 + 2 \, q \, S1111 \, S1212}{40 \, b^3 \, S1111^2}, \right. \\
& \quad -\frac{1}{120 \, b^3 \, l \, S1111^3} \left(16 \, q \, S1112^3 - 4 \, q \, S1111 \, S1122 \, S1112 - \right. \\
& \quad \left. 8 \, q \, S1111 \, S1212 \, S1112 + q \, S1111^2 \, S2212 \right), -\frac{-1 \, q \, S1111 - b \, q \, S1112}{4 \, S1111}, \\
& \quad \left. -\frac{8 \, q \, S1112^2 \, b^2 - q \, S1111 \, S1122 \, b^2 - 2 \, q \, S1111 \, S1212 \, b^2 - 15 \, l^2 \, q \, S1111^2}{40 \, b \, l \, S1111^2}, \right. \\
& \quad -\frac{q \, S1112}{2 \, b \, S1111}, \frac{8 \, q \, S1112^2 - q \, S1111 \, S1122 - 2 \, q \, S1111 \, S1212}{20 \, b \, l \, S1111^2} - \frac{l \, q}{8 \, b^3}, \\
& \quad \frac{q \, S1112}{4 \, b^3 \, S1111}, -\frac{8 \, q \, S1112^2 - q \, S1111 \, S1122 - 2 \, q \, S1111 \, S1212}{40 \, b^3 \, l \, S1111^2}, \\
& \quad -\frac{2 \, l \, q \, S1111 + b \, q \, S1112}{8 \, l \, S1111}, -\frac{3 \, q}{8 \, b}, \frac{q \, S1112}{4 \, b \, l \, S1111}, \\
& \quad \left. \frac{q}{8 \, b^3}, -\frac{q \, S1112}{8 \, b^3 \, l \, S1111}, \frac{q}{12 \, l}, \frac{q}{8 \, b \, l}, 0, -\frac{q}{24 \, b^3 \, l} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(16 q S1112^3 - 4 q S1111 S1122 S1112 - 8 q S1111 S1212 S1112 + q S1111^2 S2212) y^6}{120 b^3 I S1111^3} - \\
& \frac{(-8 q S1112^2 + q S1111 S1122 + 2 q S1111 S1212) y^5}{40 b^3 S1111^2} - \\
& \frac{(8 q S1112^2 - q S1111 S1122 - 2 q S1111 S1212) x y^5}{40 b^3 I S1111^2} - \frac{q S1112 x^2 y^4}{8 b^3 I S1111} - \\
& \frac{1}{120 b^3 I S1111^3} ((-48 b^2 q S1112^3 + 15 l^2 q S1111^2 S1112 + 16 b^2 q S1111 S1122 S1112 + \\
& 32 b^2 q S1111 S1212 S1112 - 15 b^2 q S1111^2 S2212) y^4) + \frac{q S1112 x y^4}{4 b^3 S1111} - \\
& \frac{q x^3 y^3}{24 b^3 I} + \frac{q x^2 y^3}{8 b^3} + \left(\frac{q l^2}{24 b^3} + \frac{-8 q S1112^2 + q S1111 S1122 + 2 q S1111 S1212}{20 b S1111^2} \right) y^3 + \\
& \left(\frac{8 q S1112^2 - q S1111 S1122 - 2 q S1111 S1212}{20 b I S1111^2} - \frac{l q}{8 b^3} \right) x y^3 + \frac{q S1112 x^2 y^2}{4 b I S1111} - \\
& \frac{1}{120 b I S1111^3} ((48 b^2 q S1112^3 - 30 l^2 q S1111^2 S1112 - 20 b^2 q S1111 S1122 S1112 - \\
& 40 b^2 q S1111 S1212 S1112 + 27 b^2 q S1111^2 S2212) y^2) - \frac{q S1112 x y^2}{2 b S1111} + \frac{q x^3 y}{8 b I} - \\
& \frac{3 q x^2 y}{8 b} - \frac{(-8 q S1112^2 b^2 + q S1111 S1122 b^2 + 2 q S1111 S1212 b^2 + 5 l^2 q S1111^2) y}{40 b S1111^2} - \\
& \frac{(8 q S1112^2 b^2 - q S1111 S1122 b^2 - 2 q S1111 S1212 b^2 - 15 l^2 q S1111^2) x y}{40 b I S1111^2} + \\
& \frac{q x^3}{12 I} - \frac{(2 l q S1111 + b q S1112) x^2}{8 I S1111} - \\
& \frac{1}{120 I S1111^3} (-16 q S1112^3 b^3 + 8 q S1111 S1112 S1122 b^3 + 16 q S1111 S1112 S1212 b^3 - 13 q \\
& S1111^2 S2212 b^3 + 15 l^2 q S1111^2 S1112 b + 10 l^3 q S1111^3) - \frac{(-l q S1111 - b q S1112) x}{4 S1111}
\end{aligned}$$

Função de tensão obtida para a solução da viga engastada sujeita a um carregamento triangular:

Simplify[FUNENG]

$$\frac{1}{120 b^3 l S1111^5} (q(b+y)^2 ((16 S1112^3 - 8 S1111 (S1122 + 2 S1212) S1112 + 13 S1111^2 S2212) b^4 + 2 (-16 S1112^3 + 8 S1111 (S1122 + 2 S1212) S1112 - 13 S1111^2 S2212) y b^3 - S1111 (15 S1111 S1112 l^2 + (-24 y S1112^2 - 30 S1111 x S1112 + 3 S1111 S1122 y + 6 S1111 S1212 y) l + 15 S1111 S1112 x^2 + 4 S1112 S1122 y^2 + 8 S1112 S1212 y^2 - 12 S1111 S2212 y^2 + 24 S1112^2 x y - 3 S1111 S1122 x y - 6 S1111 S1212 x y) b^2 - 2 (5 l^3 S1111^3 - 5 x^3 S1111^3 - S2212 y^3 S1111^2 + 3 S1122 x y^2 S1111^2 + 6 S1212 x y^2 S1111^2 - 15 S1112 x^2 y S1111^2 - 15 l^2 (S1111 x + S1112 y) S1111^2 + 4 S1112 S1122 y^3 S1111 + 8 S1112 S1212 y^3 S1111 - 24 S1112^2 x y^2 S1111 + 3 l (5 S1111^2 x^2 + 10 S1111 S1112 y x + 8 S1112^2 y^2 - S1111 S1122 y^2 - 2 S1111 S1212 y^2) S1111 - 16 S1112^3 y^3) b - y (-5 l^3 S1111^3 + 5 x^3 S1111^3 + S2212 y^3 S1111^2 - 3 S1122 x y^2 S1111^2 - 6 S1212 x y^2 S1111^2 + 15 S1112 x^2 y S1111^2 + 15 l^2 (S1111 x + S1112 y) S1111^2 - 4 S1112 S1122 y^3 S1111 - 8 S1112 S1212 y^3 S1111 + 24 S1112^2 x y^2 S1111 - 3 l (5 S1111^2 x^2 + 10 S1111 S1112 y x + 8 S1112^2 y^2 - S1111 S1122 y^2 - 2 S1111 S1212 y^2) S1111 + 16 S1112^3 y^3)))$$

```

FUNCOMPLIAN = Function[{x, y, S1112, S1111, S1122, S1212, S2212},
  1
  120 b^3 l S1111^3 (q (b + y)^2
    ((16 S1112^3 - 8 S1111 (S1122 + 2 S1212) S1112 + 13 S1111^2 S2212) b^4 +
      2 (-16 S1112^3 + 8 S1111 (S1122 + 2 S1212) S1112 - 13 S1111^2 S2212)
      y b^3 - S1111 (15 S1111 S1112 l^2 + (-24 y S1112^2 - 30 S1111 x S1112 +
        3 S1111 S1122 y + 6 S1111 S1212 y) l + 15 S1111 S1112 x^2 +
        4 S1112 S1122 y^2 + 8 S1112 S1212 y^2 - 12 S1111 S2212 y^2 +
        24 S1112^2 x y - 3 S1111 S1122 x y - 6 S1111 S1212 x y) b^2 -
      2 (5 l^3 S1111^3 - 5 x^3 S1111^3 - S2212 y^3 S1111^2 + 3 S1122 x y^2 S1111^2 +
        6 S1212 x y^2 S1111^2 - 15 S1112 x^2 y S1111^2 -
        15 l^2 (S1111 x + S1112 y) S1111^2 + 4 S1112 S1122 y^3 S1111 +
        8 S1112 S1212 y^3 S1111 - 24 S1112^2 x y^2 S1111 +
        3 l (5 S1111^2 x^2 + 10 S1111 S1112 y x + 8 S1112^2 y^2 -
          S1111 S1122 y^2 - 2 S1111 S1212 y^2) S1111 - 16 S1112^3 y^3) b -
      y (-5 l^3 S1111^3 + 5 x^3 S1111^3 + S2212 y^3 S1111^2 - 3 S1122 x y^2 S1111^2 -
        6 S1212 x y^2 S1111^2 + 15 S1112 x^2 y S1111^2 +
        15 l^2 (S1111 x + S1112 y) S1111^2 - 4 S1112 S1122 y^3 S1111 -
        8 S1112 S1212 y^3 S1111 + 24 S1112^2 x y^2 S1111 -
        3 l (5 S1111^2 x^2 + 10 S1111 S1112 y x + 8 S1112^2 y^2 -
          S1111 S1122 y^2 - 2 S1111 S1212 y^2) S1111 + 16 S1112^3 y^3))) ] [
x, y, nxy / (2 * Ex), 1 / Ex, -vxy / Ex,
1 /
(4 *
  Gxy), nyz / (2 *
  Ey)]

```

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{120 b^3 l} \left(E x^3 q (b+y)^2 \left(\left(\frac{2 n x y^3}{E x^3} - \frac{4 \left(\frac{1}{2 G x y} - \frac{v x y}{E x} \right) n x y}{E x^2} + \frac{13 n y z}{2 E x^2 E y} \right) b^4 + \right. \right. \\
& 2 \left(-\frac{2 n x y^3}{E x^3} + \frac{4 \left(\frac{1}{2 G x y} - \frac{v x y}{E x} \right) n x y}{E x^2} - \frac{13 n y z}{2 E x^2 E y} \right) y b^3 - \\
& \frac{1}{E x} \left(\left(\frac{15 n x y l^2}{2 E x^2} + \left(-\frac{6 y n x y^2}{E x^2} - \frac{15 x n x y}{E x^2} - \frac{3 v x y y}{E x^2} + \frac{3 y}{2 E x G x y} \right) l + \frac{15 n x y x^2}{2 E x^2} + \right. \\
& \left. \left. \frac{n x y y^2}{E x G x y} - \frac{6 n y z y^2}{E x E y} - \frac{2 n x y v x y y^2}{E x^2} + \frac{6 n x y^2 x y}{E x^2} + \frac{3 v x y x y}{E x^2} - \frac{3 x y}{2 E x G x y} \right) b^2 \right) - \\
& 2 \left(\frac{5 l^3}{E x^3} - \frac{15 \left(\frac{x}{E x} + \frac{n x y y}{2 E x} \right) l^2}{E x^2} + \frac{3 \left(\frac{5 x^2}{E x^2} + \frac{5 n x y y x}{E x^2} + \frac{2 n x y^2 y^2}{E x^2} + \frac{v x y y^2}{E x^2} - \frac{y^2}{2 E x G x y} \right) l}{E x} - \right. \\
& \left. \frac{5 x^3}{E x^3} - \frac{2 n x y^3 y^3}{E x^3} + \frac{n x y y^3}{E x^2 G x y} - \frac{n y z y^3}{2 E x^2 E y} - \frac{2 n x y v x y y^3}{E x^3} - \right. \\
& \left. \frac{6 n x y^2 x y^2}{E x^3} - \frac{3 v x y x y^2}{E x^3} + \frac{3 x y^2}{2 E x^2 G x y} - \frac{15 n x y x^2 y}{2 E x^3} \right) b - \\
& y \left(-\frac{5 l^3}{E x^3} + \frac{15 \left(\frac{x}{E x} + \frac{n x y y}{2 E x} \right) l^2}{E x^2} - \frac{3 \left(\frac{5 x^2}{E x^2} + \frac{5 n x y y x}{E x^2} + \frac{2 n x y^2 y^2}{E x^2} + \frac{v x y y^2}{E x^2} - \frac{y^2}{2 E x G x y} \right) l}{E x} + \right. \\
& \left. \frac{5 x^3}{E x^3} + \frac{2 n x y^3 y^3}{E x^3} - \frac{n x y y^3}{E x^2 G x y} + \frac{n y z y^3}{2 E x^2 E y} + \frac{2 n x y v x y y^3}{E x^3} + \right. \\
& \left. \frac{6 n x y^2 x y^2}{E x^3} + \frac{3 v x y x y^2}{E x^3} - \frac{3 x y^2}{2 E x^2 G x y} + \frac{15 n x y x^2 y}{2 E x^3} \right) \Bigg)
\end{aligned}$$

Função de tensão obtida para a solução da viga engastada sujeita a um carregamento triangular, com as constantes do tensor de compliância substituídas:

Simplify[FUNCOMPLIAN]

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{240 b^3 E_y G_{xy} l} (q(b+y)^2 ((Ex(13 G_{xy} nyz - 4 E_y nxy) + 4 E_y G_{xy} nxy (nxy^2 + 2 vxy)) b^4 + \\
& 2 (Ex(4 E_y nxy - 13 G_{xy} nyz) - 4 E_y G_{xy} nxy (nxy^2 + 2 vxy)) y b^3 + \\
& (12 Ex G_{xy} nyz y^2 + E_y (-15 G_{xy} nxy l^2 + 30 G_{xy} nxy x l + 12 G_{xy} nxy^2 y l - \\
& 3 Ex y l + 6 G_{xy} vxy y l - 15 G_{xy} nxy x^2 - 2 Ex nxy y^2 + \\
& 4 G_{xy} nxy vxy y^2 - 12 G_{xy} nxy^2 x y + 3 Ex x y - 6 G_{xy} vxy x y)) b^2 + \\
& 2 (Ex G_{xy} nyz y^3 + E_y (-10 G_{xy} l^3 + 30 G_{xy} x l^2 + 15 G_{xy} nxy y l^2 - 30 G_{xy} x^2 l - \\
& 12 G_{xy} nxy^2 y^2 l + 3 Ex y^2 l - 6 G_{xy} vxy y^2 l - 30 G_{xy} nxy x y l + \\
& 10 G_{xy} x^3 + 4 G_{xy} nxy^3 y^3 - 2 Ex nxy y^3 + 4 G_{xy} nxy vxy y^3 + \\
& 12 G_{xy} nxy^2 x y^2 - 3 Ex x y^2 + 6 G_{xy} vxy x y^2 + 15 G_{xy} nxy x^2 y)) b - \\
& y (Ex G_{xy} nyz y^3 + E_y (-10 G_{xy} l^3 + 30 G_{xy} x l^2 + 15 G_{xy} nxy y l^2 - 30 G_{xy} x^2 l - \\
& 12 G_{xy} nxy^2 y^2 l + 3 Ex y^2 l - 6 G_{xy} vxy y^2 l - 30 G_{xy} nxy x y l + \\
& 10 G_{xy} x^3 + 4 G_{xy} nxy^3 y^3 - 2 Ex nxy y^3 + 4 G_{xy} nxy vxy y^3 + \\
& 12 G_{xy} nxy^2 x y^2 - 3 Ex x y^2 + 6 G_{xy} vxy x y^2 + 15 G_{xy} nxy x^2 y))))
\end{aligned}$$

Determinação das tensões:

derly = D[FUNCOMPLIAN, y]

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{120 b^3 l} \left(q(b+y)^2 \left(2 \left(-\frac{2 nxy^3}{Ex^3} + \frac{4 \left(\frac{1}{2 G_{xy}} - \frac{vxy}{Ex} \right) nxy}{Ex^2} - \frac{13 nyz}{2 Ex^2 Ey} \right) b^3 - \right. \\
& \frac{1}{Ex} \left(\left(\frac{6 x nxy^2}{Ex^2} - \frac{4 vxy y nxy}{Ex^2} + \frac{2 y nxy}{Ex G_{xy}} + l \left(-\frac{6 nxy^2}{Ex^2} - \frac{3 vxy}{Ex^2} + \frac{3}{2 Ex G_{xy}} \right) + \right. \\
& \left. \left. \frac{3 vxy x}{Ex^2} - \frac{3 x}{2 Ex G_{xy}} - \frac{12 nyz y}{Ex Ey} \right) b^2 \right) - \\
& 2 \left(-\frac{6 y^2 nxy^3}{Ex^3} - \frac{12 x y nxy^2}{Ex^3} - \frac{15 l^2 nxy}{2 Ex^3} - \frac{15 x^2 nxy}{2 Ex^3} - \frac{6 vxy y^2 nxy}{Ex^3} + \frac{3 y^2 nxy}{Ex^2 G_{xy}} - \right. \\
& \left. \frac{3 nyz y^2}{2 Ex^2 Ey} - \frac{6 vxy x y}{Ex^3} + \frac{3 x y}{Ex^2 G_{xy}} + \frac{3 l \left(\frac{4 y nxy^2}{Ex^2} + \frac{5 x nxy}{Ex^2} + \frac{2 vxy y}{Ex^2} - \frac{y}{Ex G_{xy}} \right)}{Ex} \right) b + \\
& \frac{5 l^3}{Ex^3} - \frac{5 x^3}{Ex^3} - \frac{2 nxy^3 y^3}{Ex^3} + \frac{nxy y^3}{Ex^2 G_{xy}} - \frac{nyz y^3}{2 Ex^2 Ey} - \frac{2 nxy vxy y^3}{Ex^3} - \\
& \frac{6 nxy^2 x y^2}{Ex^3} - \frac{3 vxy x y^2}{Ex^3} + \frac{3 x y^2}{2 Ex^2 G_{xy}} - \frac{15 nxy x^2 y}{2 Ex^3} - \\
& \left. \frac{15 l^2 \left(\frac{x}{Ex} + \frac{nxy y}{2 Ex} \right)}{Ex^2} + \frac{3 l \left(\frac{5 x^2}{Ex^2} + \frac{5 nxy y x}{Ex^2} + \frac{2 nxy^2 y^2}{Ex^2} + \frac{vxy y^2}{Ex^2} - \frac{y^2}{2 Ex G_{xy}} \right)}{Ex} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y \left(\frac{6 y^2 nxy^3}{Ex^3} + \frac{12 xy nxy^2}{Ex^3} + \frac{15 l^2 nxy}{2 Ex^3} + \frac{15 x^2 nxy}{2 Ex^3} + \frac{6 vxy y^2 nxy}{Ex^3} - \frac{3 y^2 nxy}{Ex^2 Gxy} + \right. \\
& \quad \left. \frac{3 nyz y^2}{2 Ex^2 Ey} + \frac{6 vxy xy}{Ex^3} - \frac{3 xy}{Ex^2 Gxy} - \frac{3 l \left(\frac{4 y nxy^2}{Ex^2} + \frac{5 x nxy}{Ex^2} + \frac{2 vxy y}{Ex^2} - \frac{y}{Ex Gxy} \right)}{Ex} \right) \\
& Ex^3 \left) + \frac{1}{60 b^3 l} \left(q (b + y) \left(\left(\frac{2 nxy^3}{Ex^3} - \frac{4 \left(\frac{1}{2 Gxy} - \frac{vxy}{Ex} \right) nxy}{Ex^2} + \frac{13 nyz}{2 Ex^2 Ey} \right) b^4 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \left(-\frac{2 nxy^3}{Ex^3} + \frac{4 \left(\frac{1}{2 Gxy} - \frac{vxy}{Ex} \right) nxy}{Ex^2} - \frac{13 nyz}{2 Ex^2 Ey} \right) y b^3 - \right. \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{Ex} \left(\left(\frac{15 nxy l^2}{2 Ex^2} + \left(-\frac{6 y nxy^2}{Ex^2} - \frac{15 x nxy}{Ex^2} - \frac{3 vxy y}{Ex^2} + \frac{3 y}{2 Ex Gxy} \right) l + \right. \right. \\
& \quad \left. \frac{15 nxy x^2}{2 Ex^2} + \frac{nxy y^2}{Ex Gxy} - \frac{6 nyz y^2}{Ex Ey} - \frac{2 nxy vxy y^2}{Ex^2} + \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{6 nxy^2 xy}{Ex^2} + \frac{3 vxy xy}{Ex^2} - \frac{3 xy}{2 Ex Gxy} \right) b^2 \right) - \\
& \quad \left. 2 \left(\frac{5 l^3}{Ex^3} - \frac{15 \left(\frac{x}{Ex} + \frac{nxy y}{2 Ex} \right) l^2}{Ex^2} + \frac{3 \left(\frac{5 x^2}{Ex^2} + \frac{5 nxy y x}{Ex^2} + \frac{2 nxy^2 y^2}{Ex^2} + \frac{vxy y^2}{Ex^2} - \frac{y^2}{2 Ex Gxy} \right) l}{Ex} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{5 x^3}{Ex^3} - \frac{2 nxy^3 y^3}{Ex^3} + \frac{nxy y^3}{Ex^2 Gxy} - \frac{nyz y^3}{2 Ex^2 Ey} - \frac{2 nxy vxy y^3}{Ex^3} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{6 nxy^2 x y^2}{Ex^3} - \frac{3 vxy x y^2}{Ex^3} + \frac{3 x y^2}{2 Ex^2 Gxy} - \frac{15 nxy x^2 y}{2 Ex^3} \right) b - \right. \\
& \quad \left. y \left(-\frac{5 l^3}{Ex^3} + \frac{15 \left(\frac{x}{Ex} + \frac{nxy y}{2 Ex} \right) l^2}{Ex^2} - \frac{3 \left(\frac{5 x^2}{Ex^2} + \frac{5 nxy y x}{Ex^2} + \frac{2 nxy^2 y^2}{Ex^2} + \frac{vxy y^2}{Ex^2} - \frac{y^2}{2 Ex Gxy} \right) l}{Ex} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{5 x^3}{Ex^3} + \frac{2 nxy^3 y^3}{Ex^3} - \frac{nxy y^3}{Ex^2 Gxy} + \frac{nyz y^3}{2 Ex^2 Ey} + \frac{2 nxy vxy y^3}{Ex^3} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{6 nxy^2 x y^2}{Ex^3} + \frac{3 vxy x y^2}{Ex^3} - \frac{3 x y^2}{2 Ex^2 Gxy} + \frac{15 nxy x^2 y}{2 Ex^3} \right) \right) Ex^3 \left) \right)
\end{aligned}$$

Tensões normais à seção:

$$SIGMX = D[der1y, y]$$

$$1/(120 b^3 l) (q (b + y)^2$$

$$\begin{aligned}
& (- (12 y^2 nxy^3)/Ex^3 - (24 xy nxy^2)/Ex^3 - (15 l^2 nxy)/Ex^3 - (15 x^2 nxy)/Ex^3 - \\
& (12 vxy y^2 nxy)/Ex^3 + (6 y^2 nxy)/(Ex^2 Gxy) - (3 nyz y^2)/(Ex^2 Ey) - \\
& (b^2 (- (4 vxy nxy)/Ex^2 + (2 nxy)/(Ex Gxy) - (12 nyz)/(Ex Ey))) / Ex - \\
& (12 vxy xy)/Ex^3 + (6 xy)/(Ex^2 Gxy) + \\
& (6 l ((4 y nxy^2)/Ex^2 + (5 x nxy)/Ex^2 + (2 vxy y)/Ex^2 - y/(Ex Gxy))) / Ex - \\
& 2 b (- (12 y nxy^3)/Ex^3 - (12 x nxy^2)/Ex^3 - (12 vxy y nxy)/Ex^3 +
\end{aligned}$$

+

$$\begin{aligned}
 & (6 y n x y) / (E x^2 G x y) + (3 l ((4 n x y^2) / E x^2 + (2 v x y) / E x^2 - 1 / (E x G x y))) / \\
 & E x - (6 v x y x) / E x^3 + (3 x) / (E x^2 G x y) - (3 n y z y) / (E x^2 E y) - \\
 & y ((12 y n x y^3) / E x^3 + (12 x n x y^2) / E x^3 + (12 v x y y n x y) / E x^3 - (6 y n x y) / \\
 & (E x^2 G x y) - (3 l ((4 n x y^2) / E x^2 + (2 v x y) / E x^2 - 1 / (E x G x y))) / E x + \\
 & (6 v x y x) / E x^3 - (3 x) / (E x^2 G x y) + (3 n y z y) / (E x^2 E y)) E x^3 + 1 / (30 b^3 l) \\
 & (q (b + y) (2 (-2 n x y^3) / E x^3 + (4 (1 / (2 G x y) - v x y / E x) n x y) / E x^2 - (13 n y z) / (2 E x^2 E y)) \\
 & b^3 - (((6 x n x y^2) / E x^2 - (4 v x y y n x y) / E x^2 + (2 y n x y) / (E x G x y) + \\
 & l (-6 n x y^2) / E x^2 - (3 v x y) / E x^2 + 3 / (2 E x G x y)) + \\
 & (3 v x y x) / E x^2 - (3 x) / (2 E x G x y) - (12 n y z y) / (E x E y)) b^2) / E x - \\
 & 2 (-6 y^2 n x y^3) / E x^3 - (12 x y n x y^2) / E x^3 - (15 l^2 n x y) / (2 E x^3) - \\
 & (15 x^2 n x y) / (2 E x^3) - (6 v x y y^2 n x y) / E x^3 + (3 y^2 n x y) / (E x^2 G x y) - \\
 & (3 n y z y^2) / (2 E x^2 E y) - (6 v x y x y) / E x^3 + (3 x y) / (E x^2 G x y) + \\
 & (3 l ((4 y n x y^2) / E x^2 + (5 x n x y) / E x^2 + (2 v x y y) / E x^2 - y / (E x G x y))) / E x) b + \\
 & (5 l^3) / E x^3 - (5 x^3) / E x^3 - (2 n x y^3 y^3) / E x^3 + (n x y y^3) / (E x^2 G x y) - \\
 & (n y z y^3) / (2 E x^2 E y) - (2 n x y v x y y^3) / E x^3 - \\
 & (6 n x y^2 x y^2) / E x^3 - (3 v x y x y^2) / E x^3 + (3 x y^2) / (2 E x^2 G x y) - \\
 & (15 n x y x^2 y) / (2 E x^3) - (15 l^2 (x / E x + (n x y y) / (2 E x))) / E x^2 + \\
 & (3 l ((5 x^2) / E x^2 + (5 n x y y x) / E x^2 + (2 n x y^2 y^2) / E x^2 + \\
 & (v x y y^2) / E x^2 - y^2 / (2 E x G x y))) / E x - \\
 & y ((6 y^2 n x y^3) / E x^3 + (12 x y n x y^2) / E x^3 + (15 l^2 n x y) / (2 E x^3) + \\
 & (15 x^2 n x y) / (2 E x^3) + (6 v x y y^2 n x y) / E x^3 - (3 y^2 n x y) / (E x^2 G x y) + \\
 & (3 n y z y^2) / (2 E x^2 E y) + (6 v x y x y) / E x^3 - (3 x y) / (E x^2 G x y) - \\
 & (3 l ((4 y n x y^2) / E x^2 + (5 x n x y) / E x^2 + (2 v x y y) / E x^2 - y / (E x G x y))) / \\
 & E x)) E x^3 + 1 / (60 b^3 l) \\
 & (q (((2 n x y^3) / E x^3 - (4 (1 / (2 G x y) - v x y / E x) n x y) / E x^2 + (13 n y z) / (2 E x^2 E y)) b^4 + \\
 & 2 (-2 n x y^3) / E x^3 + (4 (1 / (2 G x y) - v x y / E x) n x y) / E x^2 - (13 n y z) / (2 E x^2 E y)) \\
 & y b^3 - (((15 n x y l^2) / (2 E x^2) + (-6 y n x y^2) / E x^2 - (15 x n x y) / E x^2 - \\
 & (3 v x y y) / E x^2 + (3 y) / (2 E x G x y)) l + (15 n x y x^2) / (2 E x^2) + \\
 & (n x y y^2) / (E x G x y) - (6 n y z y^2) / (E x E y) - (2 n x y v x y y^2) / E x^2 + \\
 & (6 n x y^2 x y) / E x^2 + (3 v x y x y) / E x^2 - (3 x y) / (2 E x G x y)) b^2) / E x - \\
 & 2 ((5 l^3) / E x^3 - (15 (x / E x + (n x y y) / (2 E x)) l^2) / E x^2 + (3 ((5 x^2) / E x^2 + (5 n x y y x) / \\
 & E x^2 + (2 n x y^2 y^2) / E x^2 + (v x y y^2) / E x^2 - y^2 / (2 E x G x y)) l) / \\
 & E x - (5 x^3) / E x^3 - (2 n x y^3 y^3) / E x^3 + (n x y y^3) / (E x^2 G x y) - \\
 & (n y z y^3) / (2 E x^2 E y) - (2 n x y v x y y^3) / E x^3 - (6 n x y^2 x y^2) / E x^3 - \\
 & (3 v x y x y^2) / E x^3 + (3 x y^2) / (2 E x^2 G x y) - (15 n x y x^2 y) / (2 E x^3)) b - \\
 & y (-5 l^3) / E x^3 + (15 (x / E x + (n x y y) / (2 E x)) l^2) / E x^2 - \\
 & (3 ((5 x^2) / E x^2 + (5 n x y y x) / E x^2 + (2 n x y^2 y^2) / E x^2 + \\
 & (v x y y^2) / E x^2 - y^2 / (2 E x G x y)) l) / E x + (5 x^3) / E x^3 + \\
 & (2 n x y^3 y^3) / E x^3 - (n x y y^3) / (E x^2 G x y) + (n y z y^3) / (2 E x^2 E y) + \\
 & (2 n x y v x y y^3) / E x^3 + (6 n x y^2 x y^2) / E x^3 + (3 v x y x y^2) / E x^3 - \\
 & (3 x y^2) / (2 E x^2 G x y) + (15 n x y x^2 y) / (2 E x^3))) E x^3)
 \end{aligned}$$

Simplify[SIGMX]

$$\frac{1}{120 b^3 E_y G_{xy} l} (q ((E_x (10 E_y n_{xy} - 27 G_{xy} n_{yz}) - 4 E_y G_{xy} n_{xy} (3 n_{xy}^2 + 5 v_{xy})) b^4 + 6 (15 E_x G_{xy} n_{yz} y^2 + E_y (12 G_{xy} y^2 n_{xy}^3 - 12 G_{xy} l y n_{xy}^2 + 12 G_{xy} x y n_{xy}^2 + 5 G_{xy} l^2 n_{xy} + 5 G_{xy} x^2 n_{xy} - 8 E_x y^2 n_{xy} + 16 G_{xy} v_{xy} y^2 n_{xy} - 10 G_{xy} l x n_{xy} + 3 E_x l y - 6 G_{xy} l v_{xy} y - 3 E_x x y + 6 G_{xy} v_{xy} x y)) b^2 - 15 y (E_x G_{xy} n_{yz} y^3 - 2 E_y (l - x - n_{xy} y) (G_{xy} l^2 - 2 G_{xy} x l - 2 G_{xy} n_{xy} y l + G_{xy} x^2 + 2 G_{xy} n_{xy}^2 y^2 - E_x y^2 + 2 G_{xy} v_{xy} y^2 + 2 G_{xy} n_{xy} x y))))$$

Tensões de cisalhamento:

$$\text{der1x} = D[\text{FUNCOMPLIAN}, x]$$

$$\frac{1}{120 b^3 l} \left(E_x^3 q (b + y)^2 \left(- \frac{\left(\frac{6 y n_{xy}^2}{E_x^2} - \frac{15 l n_{xy}}{E_x^2} + \frac{15 x n_{xy}}{E_x^2} + \frac{3 v_{xy} y}{E_x^2} - \frac{3 y}{2 E_x G_{xy}} \right) b^2}{E_x} - 2 \left(- \frac{15 l^2}{E_x^3} + \frac{3 \left(\frac{10 x}{E_x^2} + \frac{5 n_{xy} y}{E_x^2} \right) l}{E_x} - \frac{15 x^2}{E_x^3} - \frac{6 n_{xy}^2 y^2}{E_x^3} - \frac{3 v_{xy} y^2}{E_x^3} + \frac{3 y^2}{2 E_x^2 G_{xy}} - \frac{15 n_{xy} x y}{E_x^3} \right) b - y \left(\frac{15 l^2}{E_x^3} - \frac{3 \left(\frac{10 x}{E_x^2} + \frac{5 n_{xy} y}{E_x^2} \right) l}{E_x} + \frac{15 x^2}{E_x^3} + \frac{6 n_{xy}^2 y^2}{E_x^3} + \frac{3 v_{xy} y^2}{E_x^3} - \frac{3 y^2}{2 E_x^2 G_{xy}} + \frac{15 n_{xy} x y}{E_x^3} \right) \right) \right)$$

$$\text{TALXY} = -D[\text{der1x}, y]$$

$$\begin{aligned} & -1/(120 b^3 l) (q(b+y)^2 (-((6 nxy^2)/Ex^2 + (3 vxy)/Ex^2 - 3/(2 Ex Gxy)) b^2)/Ex - \\ & \quad 2(-(12 y nxy^2)/Ex^3 + (15 l nxy)/Ex^3 - (15 x nxy)/Ex^3 - (6 vxy y)/Ex^3 + \\ & \quad (3 y)/(Ex^2 Gxy)) b - (15 l^2)/Ex^3 - (15 x^2)/Ex^3 - (6 nxy^2 y^2)/Ex^3 - \\ & \quad (3 vxy y^2)/Ex^3 + (3 y^2)/(2 Ex^2 Gxy) - (15 nxy x y)/Ex^3 + \\ & \quad (3 l((10 x)/Ex^2 + (5 nxy y)/Ex^2))/Ex - y((12 y nxy^2)/Ex^3 - (15 l nxy)/Ex^3 + \\ & \quad (15 x nxy)/Ex^3 + (6 vxy y)/Ex^3 - (3 y)/(Ex^2 Gxy))) Ex^3) - \\ & 1/(60 b^3 l) (q(b+y) (-((6 y nxy^2)/Ex^2 - (15 l nxy)/Ex^2 + (15 x nxy)/Ex^2 + \\ & \quad (3 vxy y)/Ex^2 - (3 y)/(2 Ex Gxy)) b^2)/Ex - \\ & \quad 2(-(15 l^2)/Ex^3 + (3((10 x)/Ex^2 + (5 nxy y)/Ex^2) l)/Ex - \\ & \quad (15 x^2)/Ex^3 - (6 nxy^2 y^2)/Ex^3 - (3 vxy y^2)/Ex^3 + \\ & \quad (3 y^2)/(2 Ex^2 Gxy) - (15 nxy x y)/Ex^3) b - \\ & \quad y((15 l^2)/Ex^3 - (3((10 x)/Ex^2 + (5 nxy y)/Ex^2) l)/Ex + \\ & \quad (15 x^2)/Ex^3 + (6 nxy^2 y^2)/Ex^3 + (3 vxy y^2)/Ex^3 - \\ & \quad (3 y^2)/(2 Ex^2 Gxy) + (15 nxy x y)/Ex^3)) Ex^3) \end{aligned}$$

$$\text{Simplify}[\text{TALXY}]$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{80 b^3 Gxy l} (q(b^2 - y^2) (b^2 (Ex - 2 Gxy (2 nxy^2 + vxy)) - \\ & \quad 5 (Ex y^2 - 2 Gxy (3 l^2 - 6 x l - 4 nxy y l + 3 x^2 + 2 nxy^2 y^2 + vxy y^2 + 4 nxy x y)))) \end{aligned}$$

Tensões normais na direção Y:

$$\text{SIGMY} = D[\text{der1x}, x]$$

$$\frac{Ex^3 q(b+y)^2 \left(-\frac{15 nxy b^2}{Ex^2} - 2 \left(\frac{30 l}{Ex^2} - \frac{30 x}{Ex^2} - \frac{15 nxy y}{Ex^2} \right) b - y \left(-\frac{30 l}{Ex^2} + \frac{30 x}{Ex^2} + \frac{15 nxy y}{Ex^2} \right) \right)}{120 b^3 l}$$

$$\text{Simplify}[\text{SIGMY}]$$

$$-\frac{q(b+y)^2 (nxy b^2 + (4 l - 4 x - 2 nxy y) b + y (-2 l + 2 x + nxy y))}{8 b^3 l}$$

Anexo C

Dedução da expressão para o momento fletor sobre uma viga engastada, sujeita a um carregamento triangular, em uma seção genérica S.

Para a viga engastada da figura A.1:

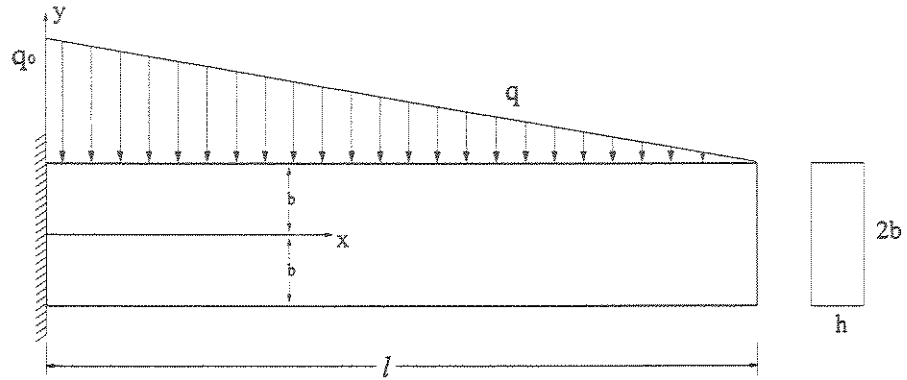


FIGURA A.1 – Viga engastada sujeita a um carregamento triangular distribuído.

têm-se a seguintes expressão para o carregamento linear:

$$q = q_0 - q_0 \cdot \frac{x}{l} = q_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) \quad (\text{A.1})$$

e para o momento fletor numa seção genérica S:

$$M_s = -\frac{q(l-x)}{2} \cdot \frac{(l-x)}{3} = -\frac{q}{6} \cdot (l-x)^2 \quad (\text{A.2})$$

Substituindo-se a equação (A.1) na equação (A.2), têm-se:

$$M_s = -\frac{q_0}{6} \cdot \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cdot (l^2 - 2lx + x^2) \quad (\text{A.3})$$

e assim:

$$M_s = -\frac{q_0}{6} \cdot \left(l^2 - 3lx + 3x^2 - \frac{x^3}{l} \right) \quad (\text{A.4})$$

que é a expressão utilizada em (8.17 a).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 BODIG, J., JAYNE, B.A. **Mechanics of Wood and Wood Composites**. Van Nostrand, New York, N.Y. 1982. 430 p.
- 2 BONES, C. A. **Análise de compósitos de madeira laminada colada e vidro/epóxi, utilizando um elemento finito de alta ordem**. 1995. 174p. Dissertação (mestrado em engenharia civil)-Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- 3 BUCKNER, D. A., GOPU, V. K. A. Design aspects of pitched and tapered glued laminated beams. **Journal of Structural Engineering**, v.114, n.4, p. 869-884, apr. 1987.
- 4 CARRASCO, E. V. M. **Resistência, Elasticidade e distribuição de tensões nas vigas retas de madeira laminada colada (MLC)**. 1989. 308p. Tese (doutorado em engenharia civil). LAMEN – EESC – USP, São Carlos.
- 5 CARRIER, G.F., ITHACA, M. Stress distributions in cylindrical anisotropic plates. **Journal of Applied Mechanics**. v.10, p.117-22. 1943.
- 6 CAUWELAERT, F.V. coefficients of deformation of an anisotropic body. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, EM.5, p.823-835. 1977.
- 7 CHEN, W.F., SALEEB. A. **Constitutive Equations for Engineering Materials**. New York, John Wiley and sons, 1982. v.1: Elasticity and Modeling 396p.

- 8 CHEN T., CHUNG C., LIN W. A revisited of a cylindrically anisotropic tube subjected to pressuring, shearing, torsion, extension and a uniform temperature change. **International Journal of Solids and Structures**. v.37, p. 5143-5158, 2000.

- 9 CHOI I., HORGAN C. O. Saint-Venant's principle and end effects in anisotropic elasticity. **Journal of Applied Mechanics**, v.44, p.424-430, 1977.

- 10 COWIN, S. C, MEHRABADI, M. M. On the identification of material symmetry for anisotropic elastic materials. **Quarterly Journal Mechanics Applied Mathematics**. v.40, PT. 4, 1987.

- 11 DESAI, C. S., SIRIWARDANE, H. J. **Constitutive Laws for Engineering Materials with Emphasis on Geological Materials**. New Jersey, Prentice Hall, 1984. 371p.

- 12 FILONENKO-BORODICH, M. **Theory of Elasticity**. Peace Publishers, Moscow. 1963.

- 13 FOSCHI, R.O., FOX, S. P. Radial stresses in curved timber beams. **Journal of the Structural Division**, v. 96, p. 1997-2008. ST10. oct.1970.

- 14 FOSCHI, R.O. Point-matched Analysis of Curved Timber Beams. **Journal of the Structural Division**, v. 96, p.35-48. ST1. jan.1970.

- 15 FUSCO, P.B. Caracterização da Deformabilidade na Elasticidade linear (Conceitos Básicos das Propriedades Elásticas da Madeira). In: **Encontro Brasileiro de Madeiras e de Estruturas de Madeira**, São Carlos, 1989. v.5, p. 175-215.

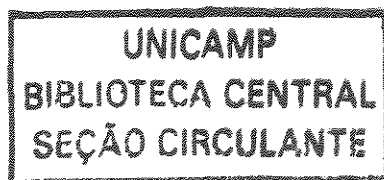
- 16 FUSCO, P.B. **Resistência dos Materiais Anisotrópicos**. I Encontro Regional em Madeiras e em Estruturas de Madeira. p.159-188. São Paulo. nov.1993.

- 17 GDOUTOS, E. E., KATTIS, M. Stress function interface and boundary conditions in anisotropic materials. **Journal of Applied Mechanics**, v.49, p. 787-791, dec. 1982.
- 18 GREEN, A.E., ZERNA, W. **Theoretical Elasticity**. Glasgow: Clarendon Press, 442 p. 1954.
- 19 HASHIN, Z. Plane Anisotropic Beams. **Journal of Applied Mechanics**, p.257-62. 1967.
- 20 HEARMON, R. F. S. **The Elasticity of Wood and Plywood**. Forest Products Research Special Report, No 7, 87p. 1948.
- 21 HSU, N. N., TANG, R. C. Internal stresses in wood logs due to anisotropic shrinkage. **Wood Science**, v. 7. n. 1. p. 43-51, jul 1974.
- 22 JAYNE, B. A., HUNT M. O. Plane stress and plane strain in orthotropic and anisotropic Media. **Wood and Fiber**, v.1, n.3, 236-247, 1969.
- 23 JAYNE, B. A., SUDDARTH S. K. Matrix-tensor mathematics in orthotropic elasticity. **Anisotropic Structural Materials**, n.405, 1966.
- 24 KUMAR A., SINGH S., KUMAR R. Stresses and deformations due to flow past a circular cylinder. **Computers & Structures**, v. 55, n. 2, p.205-210, 1995.
- 25 LEE J. W., JOHNSON, J. E. Anisotropic beams by moment-differential method. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, EM6, p. 1283-1295, dec.1973.
- 26 LEISSA A. W., VAGINS M. The design of orthotropic materials for stress optimization. **Int. Journal Solids Structures**, v.14, p.517-526, 1978.
- 27 LEKHNITSKII, S.G. **Theory of Elasticity of an Anisotropic Body**. 1^a ed. Moscou: Mir, 1981. 430p.

- 28 LEKHNITSKII, S.G., TSAI, S.W., CHERONT, T. **Anisotropic Plates**. 1^a ed. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1968. 534p.
- 29 LOURENÇO, P. B. Anisotropic softening model for masonry plates and shells. **Journal of Structural Engineering**, v. 126, n. 9, p.1008-1016, 2000.
- 30 LOVE, A. E. **A Treatise on the Theory of Elasticity**. New York, Dover Publications, 1944.
- 31 LUO, Y. F. Rupture failure and mechanical strength of the electrode wire used in wire EDM. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 94, N. 2-3, p.208-215, 1999.
- 32 MASCIA, N.T. **Considerações a respeito da Anisotropia na Madeira**. 1991. 293p. Tese (doutorado em engenharia civil)- EESC-USP, São Carlos.
- 33 MASCIA, N.T. **Relatório da Fapesp de pós-doutoramento n. 1**. State University of Wisconsin. Civil and Environment Department, jan. 1998.
- 34 MELESH, R. J. Structural analysis of solids. **Journal of the Structural Division**, v89, n. ST4, Aug. 1963.
- 35 MILLER K. L., HORGAN C. O. End effects for plane deformations of an elastic Anisotropic semi-infinite strip. **Journal of Elasticity**, v.38, p.261-316, 1995.
- 36 MURAKAMI, H., REISSNER, E., YAMAKAWA, J. Anisotropic Beam Theories with Shear Deformation. **Journal of Applied Mechanics**, v.63, p.660-668. 1996.
- 37 MUSKHELISHVILI, N. I. **Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity**. Groningen the Netherlands, 1976, 718p.

- 38 NOACK, D., ROTH, von W. On the theory of elasticity of orthotropic material. **Wood Science and Technology**, v10, p.97-110, 1976.
- 39 NOVOZHILOV, V.V. **Theory of Elasticity**. Pergamon Press, 1961, 448p.
- 40 RAO, K. M., GHOSH, B. G. Exact analysis of unsymmetric laminated beam. **Journal of the Structural Division**, ST11, p.2313-2325, nov. 1979.
- 41 SAADA, A.S. **Elasticity: Theory and Applications**. Pergamon Press, 1974, 636p.
- 42 SANTANA, C.L.O., MASCIA, N.T. (1996) Solution for plane stress problems applied to orthotropic beams by polynomial functions, In: **Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering**, Padova, Italy.
- 43 SCHCLAR, N.A. **Anisotropic Analysis Using Boundary Elements – Topics in Engineering Computational Mechanics Publications**, 1994, 142p.
- 44 SILVERMAN, I. K. Orthotropic beams under polynomial loads. *ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division*, V.90, EM5, p. 293-319, oct. 1964.
- 45 SOKOLNIKOFF, I. S. **Mathematical Theory of Elasticity**. Robert E. Krieger Publishing Company. 1987.
- 46 STRONGE W. J., KASHTALYAN M. Saint-Venant's principle for two-dimensional anisotropic elasticity. *Acta Mechanica*, V.124, pg.213-218, 1997.
- 47 TIMOSHENKO S. P., GOODIER J. N. **Theory of Elasticity**, 3^a ed. 1970, 567p.
- 48 TING, T.C.T. **Anisotropic Elasticity**. Oxford University Press, 1996.

- 49 TULLINI N., SAVOIA M. Elasticity interior solution for orthotropic strips and the accuracy of beam theories. **Journal of Applied Mechanics**, v.66, pg.368-373, jun.1999.
- 50 TUTUNCU N. Plane stress analysis of end-loaded orthotropic curved beams of constant thickness with applications to full rings. **Journal of Mechanical Design**, v.120, p.368-374, jun.1998.
- 51 YIANNOPOULOS, A. C. A simplified solution for stresses in thick-wall cylinders for various loading conditions. **Computers & Structures**, v. 60, n. 4, p.571-578, 1996.
- 52 YIANNOPOULOS, A. C., ANIFANTIS, N. K., DIMAROGONAS, A. D. Thermal stress optimization in metal rolling. **Journal of Thermal Stresses**, v. 20, n. 6, p.569-590, 1997.



ABSTRACT

This work presents an analysis on the distribution of stress and strain in anisotropic solids in the scope of the Theory of the Elasticity. In this context, to study the mechanical behavior, being based on the agreement of the stress, strain and deslocations, of anisotropic beams stress functions had been analyzed, consonants with those developed by LEKHNITSKII et al. (1968) and HASHIN (1967). Matchings of results with structures of isotropic material had also been goal of inquiry. Finally, a study on beams with consisting sections of layers it was carried through. The obtained results supply information that contribute for application of the anisotropic materials in structures of the civil construction.

Key-words: Anisotropy; Stress function; Elasticity.